BE – Probabilités/Statistique avec MATLAB
Estimation et Détection

1 Estimation d'amplitude

Un signal $s = (s_1, s_2, \ldots, s_N)^T$ est transmis sur un canal de transmission. Ce signal est modulé en amplitude par un paramètre θ *constant sur toute la durée du signal*. Ce signal modulé est alors perturbé par un bruit additif $b = (b_1, b_2, \ldots, b_N)^T$, de telle sorte que le signal reçu $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)^T$ s'écrive sous la forme :

$$y_k = \theta s_k + b_k \ , \ \ 1 \leq k \leq N$$

La variable θ est modélisée comme un paramètre **déterministe** (c'est-à-dire *non-aléatoire*), et on s'intéresse ici à l'estimation de ce paramètre. On suppose que le bruit $b = (b_1, b_2, \ldots, b_N)^T$ est un vecteur aléatoire gaussien centré, de matrice de covariance Σ (symétrique et définie positive). Le signal $s = (s_1, s_2, \ldots, s_N)^T$ est supposé connu. On montre alors que, dans ces conditions, l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est donné par :

$$\widehat{\theta}_{MV} = \frac{s^T \Sigma^{-1} y}{s^T \Sigma^{-1} s}$$

On montre ensuite que :
- $\widehat{\theta}_{MV}$ est un estimateur non-biaisé :
$$E\left[\widehat{\theta}_{MV}\right] = \theta$$
- la variance de $\widehat{\theta}_{MV}$ est donnée par :
$$var\ \widehat{\theta}_{MV} = \frac{1}{s^T \Sigma^{-1} s}$$
- $\widehat{\theta}_{MV}$ est un estimateur efficace, c'est-à-dire que sa variance est égale à la borne de Rao-Cramer des estimateurs de θ non-biaisés.

On souhaite vérifier ces différentes propriétés à l'aide de simulations numériques effectuées sous Matlab. Ainsi, pour chaque longueur de signal N, on doit générer K signaux $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)^T$, et calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance sur chacun de ces K signaux. On peut alors estimer la moyenne et la variance de l'estimateur obtenu sur N points, et comparer avec les grandeurs théoriques.

<u>Travail à réaliser :</u>

1. Ecrire une fonction `Y = generer(teta,signal,Sigma,N,K)` qui renvoie une matrice `Y` de taille $N \times K$, dont chaque colonne contient une réalisation du signal $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)^T$. Les paramètres d'entrée sont :
   - `teta` : paramètre θ modulant le signal $s = (s_1, s_2, \ldots, s_N)^T$;
   - `signal` : vecteur de N points contenant le signal connu $s = (s_1, s_2, \ldots, s_N)^T$;
   - `Sigma` : matrice de covariance Σ (de taille $N \times N$) ;
   - `N` : longueur du signal ;
   - `K` : nombre de signaux $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)^T$.

   On utilisera, pour générer les réalisations du bruit, la fonction `normmult(v,S,K)`, qui renvoie une matrice contenant K réalisations d'un vecteur aléatoire gaussien de moyenne `v` (de taille N), et de matrice de covariance `S` (de taille $N \times N$). On obtiendra ainsi une matrice `B` de taille $N \times K$, dont chaque colonne contient une réalisation du bruit $b = (b_1, b_2, \ldots, b_N)^T$. Pour ajouter à chaque colonne de cette matrice le signal $\theta s = (\theta s_1, \theta s_2, \ldots, \theta s_N)^T$, on pourra :
   - soit faire une boucle ;
   - soit utiliser la fonction `kron` de Matlab (utiliser `help`).

   Tester cette fonction avec $\theta = 4$, $N = 100$, $s_k = \log k$, $1 \leq k \leq N$, $\Sigma = I_N$ (utiliser la fonction `eye`), $K = 500$. Afficher une réalisation du signal y, ainsi que la moyenne de ces réalisations.

2. Ecrire une fonction `[teta_est,BRC] = estimateur_mv(Y,signal,Sigma)`, qui renvoie l'estimateur $\widehat{\theta}_{MV}$ pour chacune des K réalisations de $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)^T$, à partir de la matrice `Y` construite à la question 1, ainsi que la borne de Rao-Cramer correspondant à `signal` et `Sigma`. On obtient alors K valeurs de $\widehat{\theta}_{MV}$, notées $\left(\widehat{\theta}_{MV}(k)\right)_{k=1,\ldots,K}$;
3. Donner alors la moyenne et la variance de $\left(\widehat{\theta}_{MV}(k)\right)_{k=1,\ldots,K}$, et comparer avec les valeurs théoriques ;
4. Recommencer alors l'expérience pour $N = 100, 150, 200, \ldots, 500$. Afficher alors les courbes de moyenne et de variance ainsi estimées en fonction de N, et superposer (`hold on`) les courbes des bornes de Rao-Cramer théoriques correspondantes ;
5. Reprendre la question 4 avec $s_k = k^{-1}, \;\; 1 \leq k \leq N$. Commenter les différences avec les courbes obtenues précédemment (on utilisera l'expression de la variance de $\widehat{\theta}_{MV}$ obtenue pour les valeurs correspondantes de s_k et de Σ).

2 Détection d'un signal dans du bruit

Un signal $s = (s_1, \ldots, s_N)^T$ est transmis sur un canal de transmission. Ce signal est modulé en amplitude par un paramètre θ *constant sur toute la durée du signal.* Ce signal modulé est alors perturbé par un bruit additif $b = (b_1, \ldots, b_N)^T$ gaussien $\mathcal{N}(0, \Sigma)$, de telle sorte que le signal reçu $y = (y_1, \ldots, y_N)^T$ s'écrive sous la forme :

$$y_n = \theta s_n + b_n, \quad 1 \leq n \leq N.$$

On suppose désormais que le paramètre θ est une variable aléatoire. On fait alors l'hypothèse que θ est une variable binaire valant 1 ou -1 avec les mêmes probabilités ($\mathrm{P}[\theta = 1] = \mathrm{P}[\theta = -1]$).

Le récepteur, en possession du signal $y = (y_1, \ldots, y_N)^T$, souhaite savoir si ce signal ne contient que du bruit, ou s'il contient le signal modulé perturbé par le bruit additif. Ce problème de détection de signal dans du bruit additif s'écrit donc sous la forme du test d'hypothèses suivant :

$$\begin{array}{lll} H_0 : & y_n = b_n, & 1 \leq n \leq N \\ H_1 : & y_n = \theta s_n + b_n, & 1 \leq n \leq N \end{array}$$

La statistique de test donnée par le lemme de Neyman-Pearson s'écrit :

$$T(y_1, \ldots, y_n) = \left| s^T \Sigma^{-1} y \right|.$$

Pour une probabilité de fausse alarme α, la région critique (zone de rejet de H_0) est donnée par :

$$\begin{aligned} R_\alpha = & \left\{ (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^N \middle| \left| s^T \Sigma{-}1 y \right| > \lambda_\alpha \right\} \\ = & \left\{ (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^N \middle| s^T \Sigma^{-1} y \in]-\infty, -\lambda_\alpha] \cup]\lambda_\alpha, +\infty[\right\} \end{aligned} \tag{1}$$

Dans ce cas, le seuil de décision s'écrit

$$\lambda_\alpha = -\sigma_s \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

où $\sigma_s^2 = s^T \Sigma^{-1} s$. La probabilité de non-détection (ou risque de 2ième espèce) s'écrit :

$$\beta = \Phi\left(-\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sigma_s\right) - \Phi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sigma_s\right)$$

On souhaite tracer les courbes théoriques de la puissance du test $\pi = 1 - \beta$ en fonction de la probabilité de fausse alarme α, puis retrouver ces courbes par simulations.

Travail à réaliser :

1. En utilisant les fonctions `norminv` et `normcdf`, écrire une fonction

   `p = pi_theorique(signal,Sigma,N)`

   qui renvoie la puissance théorique π du test pour $\alpha \in \{0.01, 0.02, \ldots, 0.98, 0.99\}$ en fonction de `signal`, `Sigma` et `N`. Afficher le vecteur obtenu avec $N = 20$, $s_n = \sin(2\pi \tilde{f}_0 n)$, $\tilde{f}_0 = 0.1$, $1 \leq n \leq N$, $\Sigma = I_N$. Superposer alors les courbes obtenues pour $\Sigma = 2I_N$ et $\Sigma = 3I_N$. Commenter (à l'aide des expressions de λ_α, σ_s^2 et β).

2. On cherche maintenant à retrouver ces résultats par simulations. Ecrire une fonction `Y = generer(signal, Sigma,N,K)` qui renvoie une matrice `Y` de taille $N \times K$, dont chaque colonne contient une réalisation du signal $y = (y1, \ldots, y_N)$ associée à l'hypothèse H_1.
   Remarque : le paramètre θ doit changer aléatoirement à chacune des K réalisations (mais en restant constant pour les N points d'une réalisation).

3. Ecrire une fonction

   `p = pi_estimee(signal,Sigma,N,K)`

   qui renvoie la puissance estimée $\hat{\pi}$ du test pour $\alpha \in \{0.01, 0.02, \ldots, 0.99\}$, en fonction de `signal`, `Sigma`, `N`, et du nombre de simulations `K` (cette fonction utilisera bien sûr la fonction `generer`). Superposer à la courbe théorique obtenue à la question 1 les résultats obtenus avec $N = 20$, $s_n = \sin(2\pi f_0 n)$, $f_0 = 0.1$, $1 \leq n \leq N$, $\Sigma = I_N$ et $K = 500$. Commenter.