

Partie Analyse Spectrale du projet MODAP

Génération de signaux et Analyse Spectrale

1 Génération de signaux

Chaque binôme met en place un générateur de signaux permettant de générer des sommes de sinus bruitées et un autre type de signal. Le choix du générateur à réaliser est fait par l'enseignant responsable de chaque binôme.

1.1 Générateur n°1

Le générateur doit permettre de générer :

1. un signal constitué de la somme de sinusoides bruitées. Les paramètres d'entrée (choisis par l'utilisateur) sont : le nombre de points de signal, le nombre de sinusoides, la fréquence d'échantillonnage en Hz, les amplitudes et fréquences de chaque sinusoïde et le rapport signal à bruit en dB.
2. un signal de la famille des processus de Poisson constitué d'un signal des télégraphistes (sur $\{-1,+1\}$) bruité. Les paramètres d'entrée sont : le nombre de points de signal, la fréquence d'échantillonnage en Hz, le paramètre λ du processus de Poisson (représentant le nombre moyen d'instantes par seconde), la probabilité de la valeur initiale du processus p (pas forcément 0.5) et le rapport signal à bruit en dB.

1.2 Générateur °2

Le générateur doit permettre de générer :

1. un signal constitué de la somme de sinusoides bruitées. Les paramètres d'entrée (choisis par l'utilisateur) sont : le nombre de points de signal, le nombre de sinusoides, la fréquence d'échantillonnage en Hz, les amplitudes et fréquences de chaque sinusoïde et le rapport signal à bruit en dB.
2. un signal de la famille des processus à échelle constitué d'un signal NRZ (sur $\{0,+1\}$) bruité. Les paramètres d'entrée sont : le nombre de points de signal, la fréquence d'échantillonnage en Hz, la période T_0 du processus à échelle en secondes, la probabilité p (d'avoir 0) et le rapport signal à bruit en dB.

2 Analyse spectrale

Pour chaque type de signal généré, le but est d'estimer la DSP du processus et de la comparer à la DSP théorique. Plusieurs estimateurs spectraux à base de TF existent. On commencera à mettre en place le périodogramme et l'estimateur de Blackman-Tukey (voir ci-après) et s'il reste du temps, on pourra comparer avec d'autres estimateurs proposés ci-dessous.

2.1 Le périodogramme

L'estimation de la DSP par un estimateur du périodogramme se fait par :

$$\hat{S}_{Periodo}(f) = \frac{1}{N} |TF[x(n)w_N(n)]|^2$$

où N est le nombre de points de signal et $w_N(n)$ est une fenêtre temporelle de pondération ou d'apodisation.

Toutefois, cet estimateur peut être corrigé, suivant une normalisation appelée "normalisation DSP". Le biais de l'estimateur normalisé est approximativement nul, quelle que soit la fenêtre d'apodisation, pour un signal aléatoire à puissance moyenne finie et nul dans le cas d'un bruit blanc. L'estimateur normalisé s'écrit :

$$\widehat{S}_{PeriodoNorm}(f) = \frac{\widehat{S}_{Periodo}(f)}{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |w_N(n)|^2}$$

Les paramètres d'entrée de cet estimateur sont : le choix de la fenêtre d'apodisation (rectangulaire (naturelle), Bartlett (triangulaire), Hanning, Hamming et Blackman) et le facteur de zéro-padding.

La sortie sera l'affichage de la DSP en linéaire et en échelle log, l'axe des fréquences pouvant être gradué en fréquences physiques (Hz) ou normalisées.

2.2 Le périodogramme de Welch ou Welch WOSA (Weighted Overlapped Segment Averaging)

L'estimateur Welch WOSA (WW) correspond à un périodogramme moyenné. Le signal à traiter est découpé en N_{seg} segments de taille L , pouvant se recouvrir. L'estimateur WW s'écrit :

$$\widehat{S}_{WW}(f) = \frac{1}{N_{seg}} \sum_{k=0}^{N_{seg}-1} \widehat{S}_{Periodo}(f) \Big|_k$$

dans lequel k représente le numéro du segment et le périodogramme calculé sur ce segment est estimé sur un segment de signal constitué par :

$$x_k(n) = x(n + kd) \text{ pour } 0 \leq n \leq L - 1$$

d représente le nombre de points de décalage entre chaque segment. Le nombre de segments est alors égal à :

$$N_{seg} = Ent \left[\frac{N - L}{d} + 1 \right]$$

où $Ent[\cdot]$ représente la partie entière.

La normalisation DSP de cet estimateur correspond à la même normalisation que le périodogramme dans lequel on utilise des fenêtres de taille L :

$$\widehat{S}_{WWNorm}(f) = \frac{\widehat{S}_{WW}(f)}{\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} |w_L(n)|^2}$$

Les paramètres d'entrée de la méthode sont : la taille des segments L ($\leq N$), le décalage entre les segments d ($1 \leq d \leq L$), la fenêtre d'apodisation de taille L et le facteur de zéro-padding.

La sortie est une visualisation de la DSP estimée comme pour le périodogramme.

2.3 Blackman-Tukey

La méthode de Blackman-Tukey (BT) fait partie des estimateurs de la famille du corrélogramme. La méthode consiste à estimer la DSP par TFD de l'estimée de l'autocorrélation pour $m = -M, \dots, +M$, soit sur $2M - 1$ points sur laquelle est appliquée une fenêtre d'apodisation $w_M(m)$:

$$\widehat{S}_{BT}(f) = TF \left[\widehat{K}_x(m) w_M(m) \right]$$

\widehat{K}_x correspond à l'estimation de la fonction d'autocorrélation qui peut être biaisée ou non. Toutefois, dans la méthode BT, on préfère utiliser l'estimateur non biaisé (sinon le biais est déjà une forme d'apodisation).

La normalisation DSP se fait très simplement :

$$\widehat{S}_{BTNorm}(f) = \frac{\widehat{S}_{BT}(f)}{w_M(0)}$$

et généralement, les fenêtres considérées sont choisies telles que $w_M(0) = 1$.

Les paramètres d'entrée de la méthode sont : le support M de la fenêtre d'apodisation appliquée sur l'estimation de la fonction d'autocorrélation, la taille de la fenêtre totale étant $2M - 1$ ($1 \leq M \leq N$), la fenêtre d'apodisation et le facteur de zéro-padding.

La sortie est une visualisation de la DSP estimée comme pour le périodogramme.

2.4 Per-Cor

La méthode Per-Cor a été proposée pour l'analyse spectrale de signaux sonar en acoustique sous-marine. C'est en fait une combinaison de la méthode de Welch-WOSA et de la méthode du corrélogramme (BT), d'où son nom : Per-Cor. La méthode de Per-Cor se décompose en 4 parties :

1. Estimation de la DSP par Welch-WOSA, avec une taille de segment choisie L , et une fenêtre d'apodisation w ,
2. par transformée de Fourier inverse de cette estimation, estimation de la fonction d'autocorrélation sur $2L - 1$ points,
3. on applique une fenêtre d'apodisation g de $2M - 1$ points à cette fonction de corrélation estimée ($M \leq L$),
4. $\widehat{S}_{PerCor}(f)$ est estimé en calculant la TFD de la fonction de corrélation estimée et apodisée.

La version normalisation DSP de cet estimateur revient à la normalisation DSP de WW (puisque cette normalisation est immédiate pour BT, cf ci-dessus) :

$$\widehat{S}_{PerCorNorm}(f) = \frac{\widehat{S}_{PerCor}(f)}{\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} |w_L(n)|^2}$$

Les paramètres d'entrée de la méthode sont ceux de WW et BT : taille des segments L ($L \leq N$), le décalage d ($1 \leq d \leq L$), la fenêtre d'apodisation appliquée au signal, le support sur la fenêtre de corrélation M , la fenêtre d'apodisation sur la corrélation et le facteur de zéro-padding.

2.5 Stuse

La méthode Short-Time Unbiased Spectrum (STUSE) a été proposée pour construire un estimateur non biaisé à partir du recouvrement de plusieurs estimations biaisées. La méthode se décompose en 4 étapes :

1. comme pour WW, découpage du signal en segments et application d'une apodisation sur chaque segment de taille L avec un recouvrement éventuel,
2. construction des "interspectres" : si on note $X_i(f)$ la TF d'un segment n° k de taille L , apodisé avec la fenêtre choisie, l'interspectre entre deux segments i et $i + q$ s'écrit

$$\tilde{S}_{i,q}(f) = \frac{1}{L} X_i(f) X_{i+q}^*(f) \text{ pour } -Q \leq q \leq Q$$

3. on moyenne ces "interspectres" suivant i

$$\overline{S}_q(f) = \frac{1}{N_{seg}} \sum_{i=0}^{N_{seg}-1} \tilde{S}_{i,q}(f)$$

4. enfin, l'estimateur STUSE est construit en tenant compte du retard entre les i èmes segments et les $i + q$ ème segments :

$$\widehat{S}_{STUSE}(f) = \sum_{q=-Q}^Q \overline{S}_q(f) \exp(2\pi j f q d)$$

La version normalisée DSP s'obtient :

$$\widehat{S}_{STUSENorm}(f) = \frac{\widehat{S}_{STUSE}(f)}{\sum_{q=-Q}^Q \frac{1}{L} (w * w)[qd]}$$

Les paramètres d'entrée de la méthode sont : la taille des segments L ($L \leq N$), le décalage entre segments d ($1 \leq d \leq L$), la fenêtre d'apodisation et le nombre d'"interspectres" Q qui doit être en pratique *très inférieur au nombre de segments* pour obtenir les caractéristiques souhaitées pour la méthode STUSE.

3 Schéma général des méthodes d'analyse spectrale

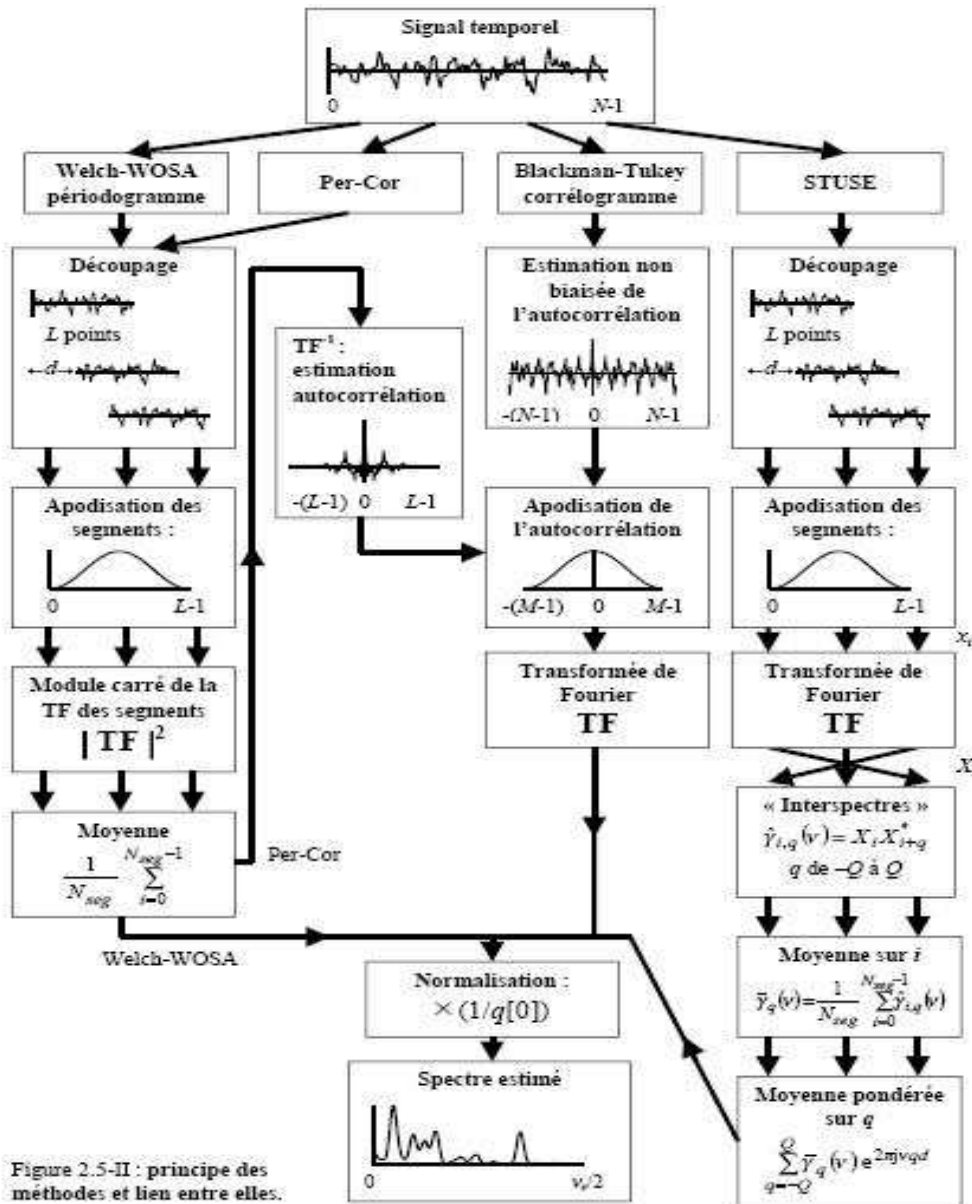


Figure 2.5-II : principe des méthodes et lien entre elles.