TD n°4 : Probabilités – Statistique
Vecteurs Gaussiens

Exercice 1
Soit V un vecteur aléatoire gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Soient X_1, X_2 et X_3 les composantes de V suivant la base canonique. On suppose que X_1, X_2 et X_3 sont des variables aléatoires indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Quelle est la densité du triplet (X_1, X_2, X_3) ?
2. Soit P la matrice de changement de base orthonormée telle que :
$$P^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$
On note X le vecteur colonne de composantes $(X_i)_{i=1,2,3}$ et Y le vecteur colonne P^tX de composantes $(Y_i)_{i=1,2,3}$.
   (a) Quelle est la densité du triplet (Y_1, Y_2, Y_3) ?
   (b) Déterminer les lois de Y_1, Y_2 et Y_3.
3. Soit $\overline{X} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i$. Vérifier que :
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} X_i^2 &= \sum_{i=1}^{3} Y_i^2 \\ Y_2^2 + Y_3^2 &= \sum_{i=1}^{3} X_i^2 - 3\overline{X}^2 \end{aligned}$$
En déduire que les variables aléatoires $\overline{X}$ et $S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ sont indépendantes.
4. Donner la loi de $\overline{X}$

Exercice 2
Soient X, Y et Z trois variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Déterminer la loi de $U = X + Y + Z$.
2. Montrer que $X - Y$ est indépendante de U.

Exercice 3
Soit X un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^n$, d'espérance $m \in \mathbb{R}^n$ et de matrice de covariance Γ (supposée définie positive). Soit A une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, de rang $p \leq n$. On pose $Y = AX$.

1. Déterminer la loi de Y ainsi que ses paramètres : espérance et matrice de covariance.
2. Application. Soit X un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^3$ de loi normale $\mathcal{N}(0, I_3)$. On définit Y par :
$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_2 + X_3 \\ Y_3 = X_1 + X_3 \end{cases}$$
Déterminer la densité de probabilité de Y.