# TD n°3 : Probabilités – Statistique

Couples de variables aléatoires

## Exercice 1

Soit $(X, Y)$ est un couple de variables aléatoires de densité :

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = k \exp -\frac{x^2+y^2}{2} & (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \\ f(x,y) = 0 & \text{sinon} \end{array}$$

1. Calculer $k$.
2. Déterminer les lois marginales de $X$ et de $Y$. Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $Cov(X, Y)$.
4. Déterminer la loi de $T = Y/X$.
5. Déterminer les lois de $Z = X + Y$ et de $U = X - Y$ en fonction de $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

## Exercice 2

Quand un courant $I$ (mesuré en ampères) traverse une résistance $R$ (mesurée en ohms) la puissance dégagée est donnée par $P = RI^2$ (mesurée en watts). Supposons que $I$ et $R$ soient des variables aléatoires indépendantes de densité respective

$$\begin{cases} f_I(i) = 6i(1-i) & i \in [0,1] \\ f_R(r) = 2r & r \in [0,1] \end{cases}$$

Quelle est la densité de probabilité de $P$ ?

## Exercice 3

On considère la fonction

$$f(x,y) = \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) \text{ pour } x \in [0,1] \text{ et } y \in [0,2]$$

1. Vérifier que $f$ définit bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la loi marginale $f_X(x)$ de $X$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X > Y)$.

## Exercice 4

Soit $\theta > 0$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad 0 < y < x\}$. Un couple $(X, Y)$ de variables aléatoires réelles a pour densité :

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = \theta^2 e^{-\theta x} & (x,y) \in D \\ f(x,y) = 0 & \text{sinon} \end{array}$$

1. Calculer les lois marginales de $X$ et de $Y$.
2. Calculer la loi de $Z = Y/X$ et montrer que les variables aléatoires $X$ et $Z$ sont indépendantes.

**Exercice 5 : Simulation de variables aléatoires normales – Méthode de Box-Müller**
Soient $U$ et $V$ deux variables aléatoires indépendantes de mêmes lois uniformes sur $]0,1]$. On définit la variable
$$R = \sqrt{-2\ln U}$$

1. Vérifier que $R$ a pour densité de probabilité la *distribution de Rayleigh*
$$f(r) = re^{-\frac{1}{2}r^2}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(r)$$

2. Quelle est la densité conjointe du vecteur $(R,V)$.

On pose
$$\begin{cases} X = R\cos(2\pi V) \\ Y = R\sin(2\pi V) \end{cases}$$

3. Montrer que $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes. Application ?

**Exercice 6**
On considère une particule qui se déplace dans le plan par sauts successifs. A chaque étape, le longueur du saut est d'une unité mais la direction du saut est définie par un angle $\Theta$ qui est réparti uniformément dans $[0,2\pi]$ (en prenant comme référence l'axe $Ox$).Les sauts sont supposes indépendnats des autres à chaque étape. On cherche l'espérance du carré de la distance entre la particule et sa position initiale après $n$ sauts . On posera $(X_i,Y_i)$ les variations de coordonnées associés au $i^{ème}$ saut.

1. Comment s'écrit le couple $(X_i,Y_i)$?
2. Quelle est la position finale au bout des $n$ sauts.
3. Comment s'écrit le carré de la distance entre la position initiale et la position finale ?
4. Calculez son espérance.

**Exercice 7 : Lois du Sup et de l'Inf.**
Dans ce qui suit, $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires indépendantes. On pose $Z = \sup(X,Y)$ et $T = \inf(X,Y)$. On demande de déterminer les lois de $Z$ et de $T$ dans les cas suivants :

1. $X$ et $Y$ suivent la loi uniforme sur $\{1,...,n\}$,
2. $X$ et $Y$ suivent la loi uniforme sur $[0,1]$,
3. $X$ et $Y$ suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

*Application*
Soient $A,B$ et $C$ trois composants d'un circuit. $A$ et $B$ entrent en fonctionnement et $C$ (groupe électrogène, par exemple) attend que l'un des deux composants $A$ ou $B$ cesse de fonctionner pour entrer en fonctionnement. On suppose que la durée de fonctionnement de $A,B$ et $C$ sont des variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètres $\lambda_A, \lambda_B$ et $\lambda_C$.

1. Quelle est la loi du temps d'attente de $C$ ?
2. Quel est le temps moyen d'attente de $C$ ?
3. Quel est le temps moyen passé par $C$ dans le circuit (attente + fonctionnement ) ?