TD n°2 : Probabilités – Statistique
Variable aléatoire à une dimension – Changement de variable

Exercice 1 : Loi de Poisson
Dans une usine, on a constaté que le nombre X d'accidents pas semaine suit une loi de Poisson de paramétre $\lambda = 3$.

1. Quelle est la probabilité que le nombre d'accidents ne dépasse pas $2\mathrm{E}[X]$ durant une semaine donnée ?
2. En supposant que les nombres d'accidents durant deux semaines consécutives sont des variables aléatoires *indépendantes*, calculer la probabilité qu'il y ait exactement 1 accident pendant 2 semaines consécutives.

On s'intéresse au nombre Z d'accidents pendant 4 semaines consécutives.

3. En supposant toujours l'indépendance mentionnée dans la question précédente, montrer en utilisant la fonction caractéristique, que la variable Z suit une loi de Poisson de paramétre $\theta = 12$.
   On admet que pour θ assez grand, une loi de Poisson de paramétre θ peut être correctement approchée par une loi normale $\mathcal{N}\left(\theta, \left(\sqrt{\theta}\right)^2\right)$.
4. En utilisant cette approximation, calculer la probabilité $\mathbb{P}(0 \leq Z \leq 15)$ qu'il n'y ait pas plus de 15 accidents durant 4 semaines consécutives.

Exercice 2 : Loi de Laplace
Une variable aléatoire X suit une loi de Laplace de paramètre $\lambda > 0$ si elle admet pour densité de probabilité la fonction suivante : $f(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1. Quelle est sa fonction de répartition ? son espérance ? sa variance ?
2. Si X suit cette loi, quelle est la loi de $|X|$?

Exercice 3 : Variables aléatoires discrètes et continues en télécommunications
On désire envoyer un signal binaire – c'est-à-dire valant 0 ou 1 avec des probabilités respectives 0.4 et 0.6 – par un câble électrique d'un point A à un point B. Cependant la transmission est affectée par diverses perturbations regroupées sous le terme de *bruit*. Pour mieux discriminer les signaux envoyés, on émet un signal d'intensité $x = 2$ (sur une échelle convenable) lorsque l'on veut transmettre 1 et d'intensité $x = -2$ lorsque l'on veut transmettre 0. Si l'on désigne par x la valeur émise en A et par R la valeur enregistrée en B, on aura

$$R = x + N$$

où N représente l'erreur due au bruit. Le décodage du signal en B obéit à la règle suivante :

$R \geq 0.5$ est interprété comme réception d'un 1
$R < 0.5$ est interprété comme réception d'un 0

1. On suppose tout d'abord que le bruit N suit une distribution normale centrée réduite. Calculer les probabilités des deux erreurs possibles, à savoir : $\mathbb{P}$ (Erreur et Emission d'un 1) et $\mathbb{P}$ (Erreur et Emission d'un 0).
2. On suppose maintenant que le bruit suit une loi de Laplace de paramètre $\lambda = 1$. Reprendre la même question et comparer les résultats.

Exercice 4 : Loi exponentielle et durée de vie

On suppose que la durée de vie d'un certain type de composants suit une loi exponentielle de paramètres λ. Un lot de 10000 composants, supposés fonctionner de façon *indépendante*, est analysé et on constate que la durée de vie moyenne des composants de ce lot est de 20 jours.

1. Que vaut λ?
2. Dans ce lot de 10000 composants, on appelle N_d la variable aléatoire qui compte le nombre de composants qui survivent au bout de d jours. Quelle est la loi de probabilité de N_d ? Que valent $\mathrm{E}(N_d)$ et $\mathrm{Var}(N_d)$? Application numérique : $d = 10$.

Exercice 5 : Loi exponentielle et temps de réparation

On suppose que le temps de réparation d'une machine est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $1/\mu = 0.1$. Le paramètre μ est appelé taux de réparation. Une machine en panne entre dans la file d'attente de l'atelier alors que le technicien vient de commencer la réparation d'une autre machine.

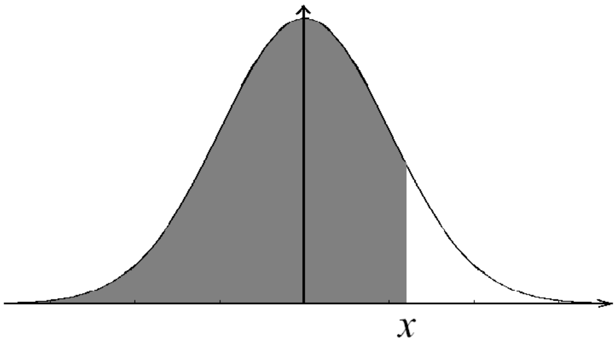
1. Quelle est la probabilité pour que le temps d'attente dans la file soit de 10 minutes ? soit compris entre 10 et 20 minutes ?
2. Quel est le temps moyen d'attente dans la file ?
3. Avec le même type de modélisation exponentielle, la machine arrive à l'atelier alors que le technicien est déjà occupé à une réparation. Est ce que cela modifie les probabilités précédentes ?

Exercice 6 : Changement de variable

Soit X une v.a. uniformément distribuée dans $[0, 1]$. Déterminer la loi de $Y = X^n$.

Annexe : Table de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ \Phi(-x) &= 1 - \Phi(x) \end{aligned} \tag{1}$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	0.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	0.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	0.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	0.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	0.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	0.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	0.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	0.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	0.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	0.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	0.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	0.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	0.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	0.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	0.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	0.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	0.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	0.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	0.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	0.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	0.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	0.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	0.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	0.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	0.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	0.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	0.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	0.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	0.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	0.9985	.9986	.9986