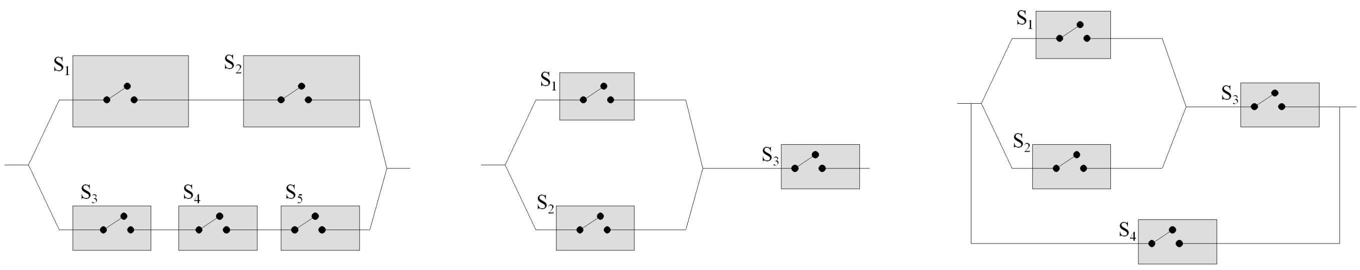
TD n°1 : Probabilités – Statistique

Probabilités élémentaires – Probabilités conditionnelles

Exercice 1

On considère les circuits suivants :

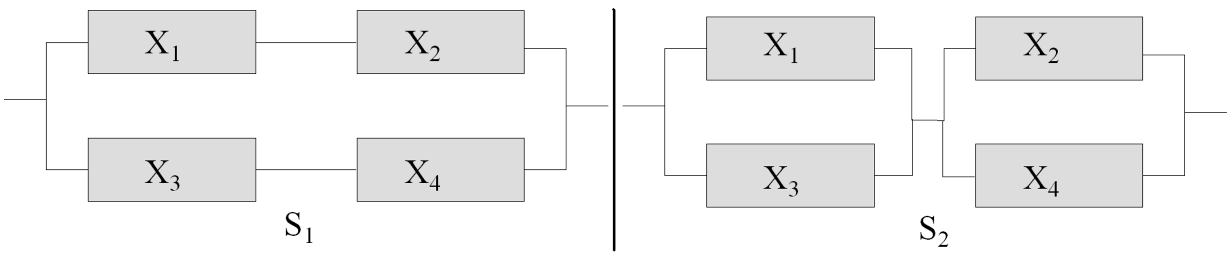


Circuit 1 Circuit 2 Circuit 3

Pour chacun d'eux, chacun des interrupteurs S_i est fermé avec une probabilité p_i et ouvert avec une probabilité $q_i = 1 - p_i$, $i = 1, \ldots, 5$. Calculer la probabilité qu'un courant circule dans le circuit sachant que chaque interrupteur agit de façon indépendante.

Exercice 2

On considère les 2 systèmes suivants dont chacun comprend 4 composants identiques de fiabilité p :



Pour quelles valeurs de p la fiabilité du système S_2 est-elle supérieure à la fiabilité du système S_1 ?

Exercice 3

Un système de communication par satellites se compose de n sous-systèmes et fonctionne un jour donné si ce jour là au moins k sous systèmes sont opérationnels. Par temps pluvieux, chaque sous sytème fonctionne avec une probabilité p_1 indépendamment des autres. Il en est de même par temps sec, mais avec une probabilité p_2. On note a la probabilité qu'il pleuve demain. Quelle est la probabilité que le système de communication fonctionne demain ?

Exercice 4

Un industriel achète des puces par lots de 20. Sa stratégie consiste à tester 4 puces prises au hasard et à n'accepter le lot que si toutes les puces sont en bon état. Si la probabilité pour qu'une puce soit défectueuse est de 0.1 et ceci indépendamment de l'état des autres, donner la probabilité pour qu'un lot soit refusé. On ne demande pas la valeur numérique.

Exercice 5
Une unité de production comporte quatre chaînes de montage, numérotées de 1 à 4. Une pièce s'est égarée et peut se trouver de manière équiprobable dans l'une des quatre chaînes. On a inspecté sans succès la chaîne 1. Quelle est la probabilité que la pièce soit dans la chaîne 2 ?

Exercice 6
Un système industriel est constitué de deux sous-systèmes S1 et S2. Le sous-système S1 est lui-même constitué de 7 composants en série et nous ne détaillons pas le sous-système S2 dans un premier temps. Si le système est en panne, la probabilité pour que la panne provienne de S1 est p (et donc $1-p$ pour qu'elle provienne de S2). Chaque composant de S1 a la même probabilité de tomber en panne de $p/7$. On exclut la possibilité de plusieurs pannes simultanées. Une panne du système survient. Les 6 premiers composants de S1 fonctionnent. On cherche la probabilité que le septième soit en panne ?

1. Chercher une réponse intuitive.
2. Formuler et résoudre le problème.
3. Réfléchir au cas $p = 0.5$ en imaginant que le système est composé de deux sous-systèmes S1 et S2 similaires de 7 composants en série.

Exercice 7
La proportion de pièces défectueuses dans un lot de pièces est 0.05. Le contrôle de fabrication des pièces est tel que :
- si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0.96
- si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0.98

On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité :

1. qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

Exercice 8
On considère une source d'information binaire émettant une suite de 0 et de 1 avec les probabilités $\mathbb{P}(0) = 0,3$ et $\mathbb{P}(1) = 0,7$. Ces informations binaires sont transmises vers un récepteur à travers 2 canaux de transmission distincts et qui fonctionnent de *façon indépendante*. Ceux-ci sont perturbés, le premier étant affecté d'une probabilité d'erreur de transmission $p_1 = 10^{-7}$ et le second $p_2 = 2.10^{-7}$. A un instant donné, le récepteur reçoit de la première liaison le symbole 0 et de la deuxième liaison, le symbole 1. On se demande alors quelle est l'information à prendre en compte.

1. Donner une réponse intuitive.
2. Pour pouvoir formaliser les choses et obtenir une réponse chiffrée, avec notamment la *probabilité d'erreur* du choix qui sera fait, on considère les événements :

$$A = \{\text{réception du couple}(0,1)\} \ , \ C_0 = \{\text{Emission d'un } 0\} \ , \ C_1 = \{\text{Emission d'un } 1\}$$

   (a) Que doit-on comparer ?
   (b) Calculer $\mathbb{P}(A/C_0)$, $\mathbb{P}(A/C_1)$ puis $\mathbb{P}(A)$.
   (c) En déduire $\mathbb{P}(C_0/A)$ et la règle de décision dans ce cas. Quelle est la probabilité d'erreur de cette décision ?
3. Quelle est la régle de décision pour chaque configuration reçue possible ? Donner à chaque fois la probabilité d'erreur.