BE n°3 – Probabilités/Statistique avec MATLAB
Estimateur du Maximum de Vraisemblance

1 Estimation d'amplitude

Un signal $s = (s_1, s_2, \ldots, s_N)^T$ est transmis sur un canal de transmission. Ce signal est modulé en amplitude par un paramètre θ *constant sur toute la durée du signal*. Ce signal modulé est alors perturbé par un bruit additif $b = (b_1, b_2, \ldots, b_N)^T$, de telle sorte que le signal reçu $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)^T$ s'écrive sous la forme :

$$y_k = \theta s_k + b_k \ , \quad 1 \leq k \leq N$$

La variable θ est modélisée comme un paramètre **déterministe** (c'est-à-dire *non-aléatoire*), et on s'intéresse ici à l'estimation de ce paramètre. On suppose que le bruit $b = (b_1, b_2, \ldots, b_N)^T$ est un vecteur aléatoire gaussien centré, de matrice de covariance Σ (symétrique et définie positive). Le signal $s = (s_1, s_2, \ldots, s_N)^T$ est supposé connu. On montre alors que, dans ces conditions, l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est donné par :

$$\widehat{\theta}_{MV} = \frac{s^T \Sigma^{-1} y}{s^T \Sigma^{-1} s}$$

On montre ensuite que :
- $\widehat{\theta}_{MV}$ est un estimateur non-biaisé :
$$E\left[\widehat{\theta}_{MV}\right] = \theta$$
- la variance de $\widehat{\theta}_{MV}$ est donnée par :
$$var\ \widehat{\theta}_{MV} = \frac{1}{s^T \Sigma^{-1} s}$$
- $\widehat{\theta}_{MV}$ est un estimateur efficace, c'est-à-dire que sa variance est égale à la borne de Rao-Cramer des estimateurs de θ non-biaisés.

On souhaite vérifier ces différentes propriétés à l'aide de simulations numériques effectuées sous Matlab. Ainsi, pour chaque longueur de signal N, on doit générer K signaux $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)^T$, et calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance sur chacun de ces K signaux. On peut alors estimer la moyenne et la variance de l'estimateur obtenu sur N points, et comparer avec les grandeurs théoriques.

Travail à réaliser :

1. Ecrire une fonction `Y = generer(teta,signal,Sigma,N,K)` qui renvoie une matrice `Y` de taille $N \times K$, dont chaque colonne contient une réalisation du signal $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)^T$. Les paramètres d'entrée sont :
   - `teta` : paramètre θ modulant le signal $s = (s_1, s_2, \ldots, s_N)^T$;
   - `signal` : vecteur de N points contenant le signal connu $s = (s_1, s_2, \ldots, s_N)^T$;
   - `Sigma` : matrice de covariance Σ (de taille $N \times N$) ;

– `N` : longueur du signal ;
– `K` : nombre de signaux $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$.

On utilisera, pour générer les réalisations du bruit, la fonction `normmult(v,S,K)` (vue au BE2), qui renvoie une matrice contenant K réalisations d'un vecteur aléatoire gaussien de moyenne `v` (de taille N), et de matrice de covariance `S` (de taille $N \times N$). On obtiendra ainsi une matrice `B` de taille $N \times K$, dont chaque colonne contient une réalisation du bruit $b = (b_1, b_2, \dots, b_N)^T$. Pour ajouter à chaque colonne de cette matrice le signal $\theta s = (\theta s_1, \theta s_2, \dots, \theta s_N)^T$, on pourra :
– soit faire une boucle ;
– soit utiliser la fonction `kron` de Matlab (utiliser `help`).

Tester cette fonction avec $\theta = 4$, $N = 100$, $s_k = \log k, \ 1 \leq k \leq N$, $\Sigma = I_N$ (utiliser la fonction `eye`), $K = 500$.

Afficher une réalisation du signal y, ainsi que la moyenne de ces réalisations.

2. Ecrire une fonction `[teta_est,BRC] = estimateur_mv(Y,signal,Sigma)`, qui renvoie l'estimateur $\widehat{\theta}_{MV}$ pour chacune des K réalisations de $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$, à partir de la matrice `Y` construite à la question 1, ainsi que la borne de Rao-Cramer correspondant à `signal` et `Sigma`. On obtient alors K valeurs de $\widehat{\theta}_{MV}$, notées $\left(\widehat{\theta}_{MV}(k)\right)_{k=1,\dots,K}$;
3. Donner alors la moyenne et la variance de $\left(\widehat{\theta}_{MV}(k)\right)_{k=1,\dots,K}$, et comparer avec les valeurs théoriques ;
4. Recommencer alors l'expérience pour $N = 100, 150, 200, \dots, 500$. Afficher alors les courbes de moyenne et de variance ainsi estimées en fonction de N, et superposer (`hold on`) les courbes des bornes de Rao-Cramer théoriques correspondantes ;
5. Reprendre la question 4 avec $s_k = k^{-1}, \ 1 \leq k \leq N$. Commenter les différences avec les courbes obtenues précédemment (on utilisera l'expression de la variance de $\widehat{\theta}_{MV}$ obtenue pour les valeurs correspondantes de s_k et de Σ).

2 Modèle de trafic

Note : sauver toutes les commandes permettant de répondre aux questions dans un fichier `exo1.m`

On considère l'arrivée d'appels téléphoniques sur un faisceau de lignes d'un central téléphonique. On peut admettre que pour un faisceau particulier, le nombre d'arrivée d'appels par unité de temps suit une loi de Poisson de paramètre inconnu $\theta > 0$. On sait alors que sous cette hypothèse, la durée T séparant deux arrivées successives d'appels téléphoniques sur ce faisceau (avec l'unité de temps précédente) suit une loi exponentielle de paramètre θ soit :

$$f_T(t) = \theta e^{-\theta t} 1_{R^+}(t) \tag{1}$$

On désire estimer le paramètre θ inconnu à l'aide de l'observation de N durées $t_i, i = 1, ..., N$ séparant des arrivées successives d'appels téléphoniques sur ce faisceau.

Si on suppose qu'aucune information a priori n'est disponible sur θ (à part $\theta > 0$ bien sur), on estime θ à l'aide de l'estimateur du maximum de vraisemblance, noté $\widehat{\theta}_{MV}$. On a alors :

$$\widehat{\theta}_{MV} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} t_i} = \frac{1}{\bar{t}}$$

Il est connu que pour l'ensemble des faisceaux téléphoniques, le nombre moyen θ d'arrivées d'appels téléphoniques par unité de temps est distribué suivant une loi exponentielle de paramètre λ connu :

$$g(\theta) = \lambda e^{-\lambda \theta} 1_{R^+}(\theta) \tag{2}$$

La densité $g(\theta)$ représente pour cet exemple la loi a priori sur le paramètre θ. Les estimateurs de la moyenne a posteriori et du maximum a posteriori de θ sont alors :

$$\begin{aligned}\widehat{\theta}_{MMSE} &= \frac{N+1}{\lambda + \sum\limits_{i=1}^{N} t_i} \\ \widehat{\theta}_{MAP} &= \frac{N}{\lambda + \sum\limits_{i=1}^{N} t_i}\end{aligned}$$

<u>Travail à réaliser :</u>

1. Prendre $\lambda = 2$. Générer θ (variables `teta`) d'après (2) à l'aide de la fonction `exprnd`. Générer ensuite $N = 50$ instants (variable `t`) d'après (1).

   Attention : la commande `x=exprnd(p)` génère des variables exponentielles de paramètre $\mathbf{1/p}$.
2. Calculer alors $\widehat{\theta}_{MV}$, $\widehat{\theta}_{MMSE}$, $\widehat{\theta}_{MAP}$ (variables `tetaMV`, `tetaMMSE`, `tetaMAP`).
3. Reprendre les questions 1 et 2 en faisant varier N de 50 à 1000 avec un pas de 50. Afficher en les superposant les courbes obtenues pour $\widehat{\theta}_{MV}$, $\widehat{\theta}_{MMSE}$, $\widehat{\theta}_{MAP}$. Commentaires ?

3 Compléments : estimation d'amplitude et de phase

On considère l'émission d'un signal sinusoïdal du type

$$s(n) = \cos(2\pi f_0 n) \ , \quad n = 0, \ldots, N-1 \ .$$

Lors de sa transmission sur le médium de propagation, ce signal est amplifié ou atténué, déphasé, et bruité, de sorte que le signal reçu s'écrit sous la forme

$$r(n) = A\cos(2\pi f_0 n + \phi) + b(n) \ , \quad n = 0, \ldots, N-1 \ . \tag{3}$$

où $b(n)$ est un bruit blanc gaussien de variance σ^2. L'amplitude A et la phase ϕ (avec $A > 0$ et $\phi \in [0; 2\pi[$) sont alors les deux paramètres qui caractérisent la transmission, et on cherche alors à les estimer. Ce type de problème se rencontre dans deux nombreuses applications, comme les télécommunications, le radar, le sonar, la sismique,... En télécommunications, l'estimation de la phase en réception est particulièrement importante car elle permet la synchronisation entre émetteur et récepteur. On suppose que les paramètres A et ϕ sont déterministes et inconnus. On choisit alors la méthode du maximum de vraisemblance pour les estimer. Dans ce cas, les estimateurs $\widehat{A}_{MV}$ et $\widehat{\phi}_{MV}$ sont ceux qui maximisent la densité

$$f(r; A, \phi) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(r(n) - A\cos(2\pi f_0 n + \phi))^2\right] \ ,$$

c'est-à-dire ceux qui minimisent l'erreur quadratique

$$\sum_{n=0}^{N-1}(r(n) - A\cos(2\pi f_0 n + \phi))^2$$

(pour cette raison, $\widehat{A}_{MV}$ et $\widehat{\phi}_{MV}$ sont également les *estimateurs des moindres carrés* de A et ϕ). On montre alors que $\widehat{A}_{MV}$ et $\widehat{\phi}_{MV}$ sont donnés par :

$$\widehat{A}_{MV} = \frac{2}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} r(n)e^{-j2\pi f_0 n}\right| \tag{4}$$

$$\widehat{\phi}_{MV} = \arctan \frac{-\sum_{n=0}^{N-1} r(n)\sin(2\pi f_0 n)}{\sum_{n=0}^{N-1} r(n)\cos(2\pi f_0 n)} \tag{5}$$

D'autre part, on montre que les bornes de Cramer-Rao de A et ϕ sont :

$$CRB_A = \frac{2\sigma^2}{N}$$

$$CRB_\phi = \frac{1}{N.RSB}$$

où $RSB = \frac{A^2}{2\sigma^2}$ est le rapport signal-sur-bruit. On notera RSB_{dB} ce rapport exprimé en dB, c'est-à-dire $RSB_{dB} = 10\log_{10} RSB$.

Travail à réaliser :

1. Créer un programme `estimation.m` permettant de générer un signal du type (3), et de déterminer $\widehat{A}_{MV}$ et $\widehat{\phi}_{MV}$ au moyen des formules (4) et (5). On prendra comme paramètres : $N = 100$, $A = 2$, $f_0 = 0.45$, $\phi = \pi/5$, et $RSB_{dB} = 10$.
2. Compléter ce programme en renouvelant l'expérience sur 1000 réalisations. Sauvegarder à chaque fois les valeurs de $\widehat{A}_{MV}$ et $\widehat{\phi}_{MV}$. Afficher alors l'histogramme de $\widehat{A}_{MV}$ et $\widehat{\phi}_{MV}$. Que peut-on en déduire ? Déterminer alors la moyenne et la variance de $\widehat{A}_{MV}$ et $\widehat{\phi}_{MV}$ obtenues sur ces réalisations, et comparer aux valeurs théoriques.
3. Reprendre le point précédent en prenant 50 valeurs de RSB_{dB} entre -5 à 10. Afficher alors pour chacun des deux estimateurs la courbe donnant la variance estimée et la borne de Cramer-Rao en fonction de RSB_{dB}. Conclusion ?