TD n°3 : Variable Complexe

Exercice 1 - Déterminer les TZ de $\delta(n)$, $u(n)$, $u(n)$, $a^n u(n)$, $na^{n-1}u(n)$, et $a^n \sin(nb)u(n)$.

Exercice 2 - Soit le système d'entrée $x(n)$ et de sortie $y(n)$ défini par l'équation aux différences

$$y(n) = x(n) - ax(n-1). \tag{1}$$

1. Déterminer la fonction de transfert de ce système définie par $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$.
2. Déterminer la TZ du signal

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0\,; \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2}$$

   puis la TZ de $\delta(n-1)$. En déduire la réponse impulsionnelle $h(n) = \mathrm{TZ}^{-1}[H(z)]$ du système défini par (1).
3. La réponse indicielle d'un système, notée $r(n)$, est la réponse à un échelon $u(n)$ défini par :

$$u(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \geq 0\,; \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \tag{3}$$

   c'est à dire $r(n) = h(n) * u(n)$ où $*$ représente le produit de convolution. Déterminer la réponse indicielle du système défini par (1).

Exercice 3 - Système du second ordre

Soit le système du second ordre d'entrée $x(n)$ et de sortie $y(n)$ défini par l'équation aux différences

$$y(n) = x(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2). \tag{4}$$

On supposera dans cet exercice que a_1 et a_2 sont deux nombres réels tels que $a_1^2 - 4a_2 < 0$.

1. Déterminer la fonction de transfert de ce système notée $H(z)$. On notera $p_1 = re^{j\theta}$ et $p_2 = re^{-j\theta}$ les pôles de $H(z)$. Quelle est l'expression de $H(z)$ en fonction de r et θ ?
2. On suppose $r \in]0,1[$. Déterminer $\mathrm{TZ}[p_1^n u(n)]$, où $u(n)$ est l'échelon défini à l'exercice précédent. En déduire la réponse impulsionnelle $h(n)$ du système en fonction de r et de θ.

Exercice 4 - On considère l'opération dite de "moyenne glissante" appliquée au signal discret $x(n)$:

$$y(n) = \frac{1}{n_0} \sum_{k=n-n_0}^{n} x(k) \tag{5}$$

où n_0 est un entier positif fixé.

1. Montrer que $y(n)$ est la sortie d'un filtre linéaire dont on précisera la réponse impulsionnelle $h(n)$ et la fonction de transfert $H(z) = \mathrm{TZ}\,[h(n)]$.
2. Déterminer $Y(z)$ lorsque $x(n) = a^n u(n)$ avec $|a| < 1$ et

$$u(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \geq 0\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6}$$

   En appliquant la formule d'inversion à l'expression de $Y(z)$ trouvée ci-dessus, déterminer $y(n)$ pour $n \geq n_0$. Peut-on retrouver ce résultat plus simplement ?
3. On applique le filtre précédent au signal $x(n)$ de la Figure 1. Expliquer qualitativement l'effet du filtre à "moyenne glissante" sur le signal $x(n)$. Avez-vous une idée d'une application où pourrait être utilisé ce filtre ?

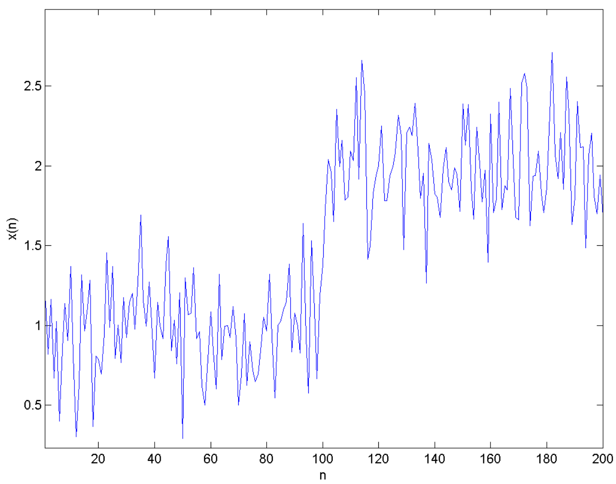

FIG. 1 – Signal $x(n)$.