Variable Complexe – TD n°2 (transformée de Laplace)

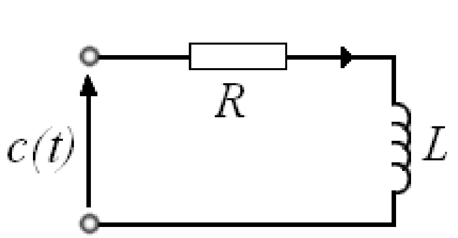

Figure 1: Circuit RL.

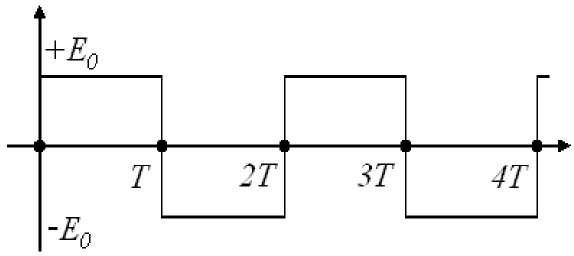

Figure 2: Fonction créneau $c(t)$.

Considérons le schéma électrique représenté sur la Fig. 1. On désire calculer l'expression temporelle du courant $i(t)$ dans l'inductance en réponse à différentes excitations en tension $c(t)$ avec $i(0) = 0$. Pour cela, nous allons utiliser la transformée de Laplace.

Exercice 1 - Excitation harmonique

On considère tout d'abord l'excitation sinusoïdale

$$c(t) = E_0 \sin(\omega t).$$

1. Donnez l'expression différentielle du courant $i(t)$ dans l'inductance.
2. Passez dans le domaine de Laplace afin de déterminer l'équation qui régit $I(p) = \mathrm{TL}[i(t)]$ en fonction de L, E_0, ω et $\omega_c = R/L$.
3. A l'aide d'une décomposition en éléments simples et des tables de transformée inverse, déterminer l'expression du courant $i(t)$ en fonction de E_0, L, ω_c et $\eta = \omega/\omega_c$.

Exercice 2 - Réponse à un créneau

On considère à présent l'excitation créneau $2T$-périodique représentée sur la Fig. 2 et définie par

$$c(t) = \begin{cases} E_0, & \text{si } 0 < t < T; \\ -E_0, & \text{si } T < t < 2T; \\ c(t+2T), & \text{sinon.} \end{cases}$$

A. Calcul de transformée de Laplace

1. Calculer

$$I_k = \int_{2kT}^{2(k+1)T} c(t) e^{-pt} dt \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{N}.$$

2. Montrer alors que
$$C(p) = \frac{E_0}{p} \tanh\left(\frac{1}{2}pT\right).$$
<u>*Indication :*</u> *On rappelle que* $\sinh(2x) = 2\cosh(x)\sinh(x)$.

3. En s'insipirant de l'Exercice 1, donner l'expression de $I(p) = \mathrm{TL}[i(t)]$ en fonction de R, L et T.

B. Etude du circuit RL

On se propose de retrouver $i(t)$ par transformée de Laplace inverse de $I(p)$.

1. Etudier $\lim_{p\to 0} C(p)$. Que peut-on alors dire du point 0 pour $I(p)$?

2. D'après la question précédente, donner les pôles de $I(p)$, les représenter dans le plan en p et donner l'abscisse de convergence simple de $I(p)$. Enfin, calculer les résidus de $e^{pt}I(p)$ associés à ces pôles.
<u>*Indication :*</u> *On pourra exprimer certains résidus en fonction de* $p_k = \frac{i\pi}{T}(2k+1)$ *(*$k \in \mathbb{Z}$*).*

3. En déduire $i(t)$ pour $t > 0$ en appliquant le théorème d'inversion sur le contour de Bromwich de la Fig. 3.
<u>*Indication :*</u> *On admettra que les intégrales de* $e^{pt}I(p)$ *sur* AB *et* CD *sont nulles.*

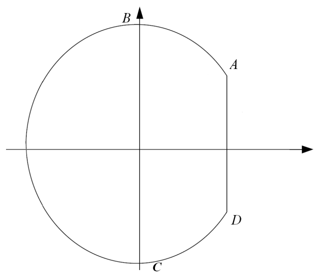

Figure 3: Contour d'intégration.

Fonction	**TL**
$f(t)$	$F(p)$
$(-1)^n t^n f(t)$	$\frac{d^n}{dp^n}F(p)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1}f(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(p)}{p}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(p)dp$
$e^{at}f(t)$	$F(p-a)$
$f(t-a)U(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$
$f\left(\frac{t}{k}\right)$	$kF(kp)$
$\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(p)G(p)$