TD n°2 : Variable Complexe

Exercice 1 - Transformée de Laplace inverse de $Y(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$

1. Calculer $Y'(p)$ et en déduire une équation différentielle liant $Y'(p)$ et $Y(p)$.
2. En déduire une équation différentielle liant $y'(t)$ et $y(t)$.
3. Déterminer $y(t)$ à une constante multiplicative près notée C.
4. En considérant $p = x > 0$ et en effectuant le changement de variable $u^2 = xt$, déterminer la constante C.
   Indication : on fera un changement de variables adéquat et on rappelle le résultat classique $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 2 - Transformée de Laplace inverse de $Y(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$

On considère la fonction de la variable complexe définie par :

$$g(z) = \frac{e^{zt}}{\sqrt{z}}.$$

1. Écrire la forme générale des déterminations de $g(z)$ définies dans $\mathbb{C} \backslash]-\infty, 0]$. En déduire la détermination qui prend la valeur $\frac{e^{xt}}{i\sqrt{-x}}$ sur le bord supérieur de la coupure. On retiendra cette détermination pour la suite du problème.
2. Que vaut la détermination précédente de $g(z)$ sur le bord inférieur de la coupure ?
3. Appliquer le théorème de Cauchy à la fonction $g(z)$ sur le contour représenté sur la Figure 1.

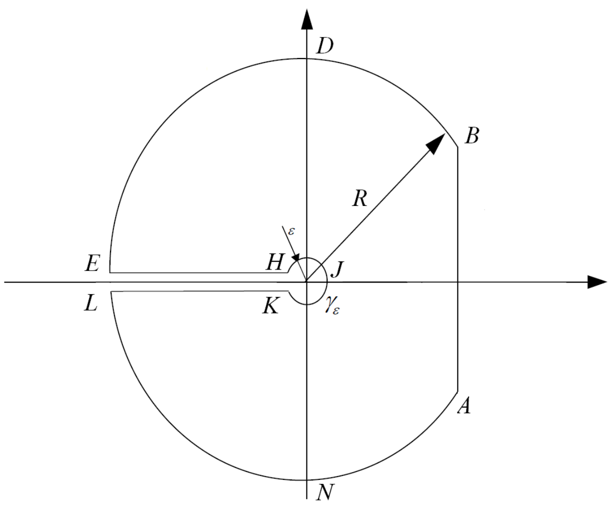

Fig. 1 – Contour d'intégration.

4. Justifier le fait que les intégrales sur les arcs de cercle tendent vers 0 lorsque ϵ et R tendent respectivement vers 0 et $+\infty$. En déduire une expression de la transformée de Laplace inverse de $Y(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$ (pour $t > 0$) en fonction des intégrales de $g(z)$ sur les bords supérieur et inférieur de la coupure.
5. En utilisant les expressions de $g(z)$ sur les bords inférieur et supérieur de la coupure déterminées précédemment, retrouver l'expression de la transformée de Laplace inverse de $Y(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$.
Indication : on fera un changement de variables adéquat et on rappelle le résultat classique $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 3

1. Montrer que la transformée de Laplace de la "dent de scie définie par

$$f(t) = \begin{cases} f(t+1), & \forall t \\ \frac{1}{2} - t, & t \in [0,1] \end{cases}$$

est

$$F(p) = -\frac{1}{p^2} + \frac{1}{2p}\frac{1+e^{-p}}{1-e^{-p}}.$$

2. Déterminer la transformée de Laplace de $f(t) = |\sin t|$ sans calculer d'intégrale, par application du théorème du retard et utilisation du facteur de périodicité.

Rappels

Fonction	**TL**
$f(t)$	$F(p)$
$(-1)^n t^n f(t)$	$\frac{d^n}{dp^n} F(p)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(p)}{p}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(p)dp$
$e^{at} f(t)$	$F(p-a)$
$f(t-a)U(t-a)$	$e^{-ap} F(p)$
$f\left(\frac{t}{k}\right)$	$kF(kp)$
$\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(p)G(p)$