Variable Complexe – TD n°1 (calcul intégral et calcul de série)

Exercice 1 - Calcul intégral

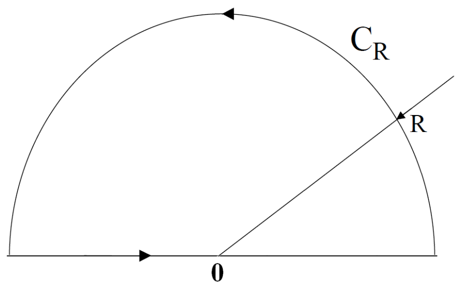

Fig. 1: Exercice 1 : contour d'intégration.

On souhaite calculer l'intégrale

$$I = \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$$

Pour cela, on considère la fonction de variable complexe z

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}.$$

et le contour représenté sur la Figure 1 avec $R > 1$.

1. Calculer les résidus de la fonctions $f(z)$ dans le domaine défini par le contour de la Figure 1.
2. Montrer que l'intégrale de $f(z)$ le long de C_R tend vers 0 lorsque $R \to +\infty$.
3. Appliquer le théorème des résidus à la fonction $f(z)$ et en déduire la valeur de l'intégrale I.

Exercice 2 - Calcul de série

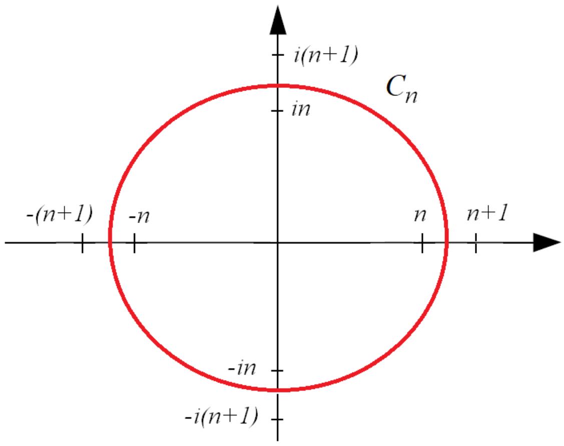

Fig. 2: Exercice 2 : contour d'intégration.

On souhaite calculer la série :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^4}.$$

Pour cela, on considère la fonction de variable complexe z

$$g(z) = \frac{1}{z^4} \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

1. Calculer les résidus de la fonctions $g(z)$ dans le domaine défini par le contour de la Figure 2.
2. Montrer que l'intégrale de $g(z)$ le long de C_n tend vers 0 lorsque $R \to +\infty$.
   Indication : *On pourra considérer séparément les demis-cercles supérieur et inférieur.*
3. Appliquer le théorème des résidus à la fonction $g(z)$ et en déduire la valeur de la série S.