Feuille n°6 : Variable Complexe

Exercice 1 :

1)

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 + a_1 z + a_2} = \frac{z^2}{z^2 - [2r\cos\theta]\, z + r^2}$$

La condition de stabilité est donc $|r| < 1$ ou $|a_2| < 1$. Le domaine de stabilité dans le plan (a_1, a_2) est donc le domaine situé au dessus de la parabolle d'équation $a_2 = \frac{a_1^2}{4}$ et au dessous de la droite d'équation $a_2 = 1$.

2) Le plus simple est d'effectuer une décomposition en éléments simples de $H(z)$. On obtient :

$$H(z) = \frac{p_1}{p_1 - p_2}\frac{1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{p_2}{p_2 - p_1}\frac{1}{1 - p_2 z^{-1}}$$

où $p_1$et p_2 sont les zéros de $z^2 + a_1 z + a_2 = 0$. D'après le TD n°4, on sait que

$$TZ\left[p_1^n u(n)\right] = \frac{1}{1 - p_1 z^{-1}} \text{ pour } \left|p_1 z^{-1}\right| < 1$$

d'où

$$h(n) = \frac{p_1^{n+1} - p_2^{n+1}}{p_1 - p_2} u(n) = r^n \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} u(n)$$

3) L'équation de récurrence $y(n) = x(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$ est l'équation obtenue lorsqu'on filtre le signal $x(n)$ par un filtre de réponse impulsionnelle $h(n)$. La sortie du filtre est alors définie par $y(n) = x(n) * h(n)$. En choissant correctement le filtre, on peut supprimer les hautes fréquences, les basses fréquences, ... du signal $x(n)$, ce qui a de multiples applications comme le débruitage de signaux.

Exercice 2 :

1)

$$H(z) = 1 - az^{-1} = \frac{z - a}{z}$$

Ce système admet un seul pôle $z = 0$ qui est à l'intérieur du cercle unité. Donc il est stable quelle que soit la valeur de a.

2)

$$h(n) = \delta(n) - a\delta(n-1)$$

3)La réponse indicielle est la réponse à un échelon $u(n)$ c'est-à-dire

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * u(n) \\ &= [\delta(n) - a\delta(n-1)] * u(n) \\ &= u(n) - au(n-1) \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } n < 0 \\ 1 \text{ si } n = 0 \\ 1 - a \text{ si } n > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 3 :

1) Comme précédemment

$$H(z) = 1 + b_1 z^{-1} \text{ et } h(n) = \delta(n) + b_1 \delta(n-1)$$

2)

$$\begin{aligned} TZ\left[\sigma^2 \delta(k)\right] &= \sigma^2 \qquad \forall z \\ TZ\left[a^k u(k)\right] &= \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad |z| > |a| \end{aligned}$$

3) On vérifie

$$\begin{aligned} C_y(k) &= E\left[y(n)y(n-k)\right] \\ &= E\left[\{x(n) + b_1 x(n-1)\}\{x(n-k) + b_1 x(n-k-1)\}\right] \\ &= \left(1 + b_1^2\right) C_x(k) + b_1 C_x(k-1) + b_1 C_x(k+1) \end{aligned}$$

d'où

$$S_y(z) = \left[\left(1 + b_1^2\right) + b_1 z^{-1} + b_1 z\right] S_x(z)$$

Puisque $H(z)H(z^{-1}) = [1 + b_1 z^{-1}][1 + b_1 z]$, on a le résultat attendu.

4)

$$\begin{aligned} C_{yx}(k) &= E\left[y(n)x(n-k)\right] \\ &= E\left[\{x(n) + b_1 x(n-1)\} x(n-k)\right] \\ &= C_x(k) + b_1 C_x(k-1) \end{aligned}$$

d'où

$$S_{yx}(z) = \left[1 + b_1 z^{-1}\right] S_x(z)$$

ce qui correspond bien à $S_{yx}(z) = H(z)S_x(z)$.