Examen de Variable Complexe **29 Mars 2011**

Les 3 exercices sont indépendants. Une feuille A4 recto-verso est autorisée.

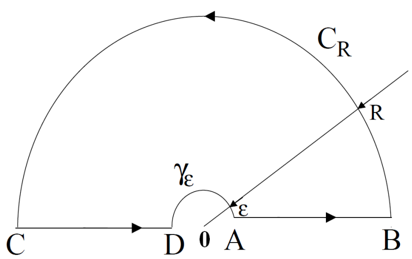

FIG. 1 – Contour d'intégration pour l'exercice 1.

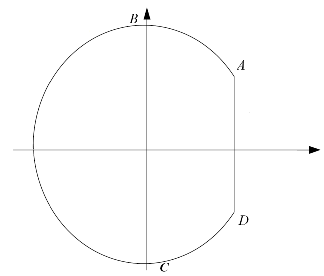

FIG. 2 – Contour d'intégration pour l'exercice 2.

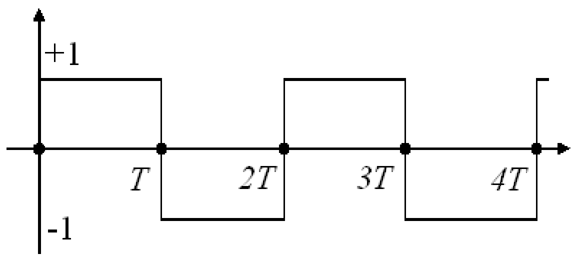

FIG. 3 – Fonction créneau $c(t)$.

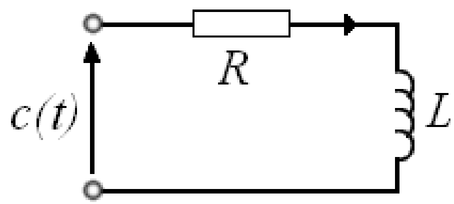

FIG. 4 – Circuit RL.

Exercice 1 : Calcul intégral

On considère le contour de la Figure 1.

1. Définir la détermination de
$$f(z) = \frac{\log z}{(1+z^2)^3} \tag{1}$$
qui admet O comme point de branchement, l'axe $(0x^+)$ comme axe de coupure et telle que $\log z = \ln x$ sur AB.
2. Calculer la valeur de cette détermination sur CD.
3. Calculer les résidus de la fonction f associés aux pôles (notés p_k) situés à l'intérieur du contour $\Gamma = AB \cup C_R \cup CD \cup \gamma_\epsilon$.
Indication : *Pour effectuer un développement de Laurent de $f(z)$ au voisinage de p_k, on pourra effectuer le changement de variable $u = z - p_k$ et effectuer un développement de Laurent de $g(u) = f(z)|_{z=u+p_k}$ au voisinage de 0.*

4. Etudier avec soin $\lim_{\epsilon\to 0} I_\epsilon$ et $\lim_{R\to+\infty} I_R$ avec
$$I_\epsilon = \int_{\gamma_\epsilon} f(z)dz, \qquad I_R = \int_{C_R} f(z)dz. \tag{2}$$
5. En déduire les valeurs des intégrales suivantes :
$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^3}dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}dx. \tag{3}$$

Exercice 2 : Etude d'un circuit

A. Calcul de transformée de Laplace

On se propose de calculer la transformée de Laplace $C(p)$ de la fonction créneau $2T$-périodique $c(t)$ représentée sur la figure 3 et définie par

$$c(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < t < T\,; \\ -1, & \text{si } T < t < 2T\,; \\ c(t+2T), & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer
$$I_k = \int_{2kT}^{2(k+1)T} c(t)e^{-pt}dt \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{N}.$$
2. Montrer alors que
$$C(p) = \frac{1}{p}\tanh\left(\frac{1}{2}pT\right).$$
Indication : *On rappelle que* $\sinh(2x) = 2\cosh(x)\sinh(x)$.

B. Etude du circuit RL

L'équation différentielle qui régit la loi du courant $i(t)$ dans le circuit RL représenté sur la figure 4 est

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = c(t) \quad \text{avec} \quad i(0) = 0 \quad \text{et } c(t) \text{ défini dans la partie A.}$$

1. Donner l'expression de $I(p) = \mathrm{TL}[i(t)]$ en fonction de R, L et T.
2. On se propose de retrouver $i(t)$ par transformée de Laplace inverse de $I(p)$.
   (a) Etudier $\lim_{p\to 0} C(p)$. Que peut-on alors dire du point 0 pour $I(p)$?
   (b) D'après la question précédente, donner les pôles de $I(p)$, les représenter dans le plan en p et donner l'abscisse de convergence simple de $I(p)$. Enfin, calculer les résidus de $I(p)$ associés à ces pôles.
   Indication : *On pourra exprimer certains résidus en fonction de* $p_k = \frac{i\pi}{T}(2k+1)$ $(k \in \mathbb{Z})$.
   (c) En déduire $i(t)$ pour $t > 0$ en appliquant le théorème d'inversion sur le contour de Bromwich de la figure 2.
   Indication : *On admettra que les intégrales de* $e^{pt}I(p)$ *sur les arcs de cercle* AB *et* CD *sont nulles.*

Exercice 3 : Filtrage numérique

1. Déterminer la transformée en Z du signal $x(n)$ défini par
$$x(n) = a^n u(n), \quad \text{avec} \quad |a| < 1 \tag{4}$$
où $u(n)$ est l'échelon de Heaviside : $u(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Préciser la région de convergence de $X(z)$.
2. Déterminer la transformée en Z du signal $y(n)$ défini par
$$y(n) = -a^n u(-n-1), \quad \text{avec} \quad |a| < 1 \tag{5}$$
et préciser la région de convergence de $Y(z)$. Interpréter.
3. On considère un système linéaire de fonction de transfert d'ordre 2
$$H(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} \quad \text{avec} \quad |a| < |b|.$$
Donner la réponse impulsionnelle $h(n)$ associée à la fonction de transfert $H(z)$.
Indication : *On pourra distinguer* 3 *cas, en s'inspirant des résultats des questions 1 et 2.*
4. On considère à présent le système linéaire défini par l'équation de récurrence
$$y(n) = ay(n-1) + x(n).$$
Calculer la fonction de transfert $H(z)$ associée. En déduire la réponse du système **causal** lorsque $x(n) = b^n u(n)$.

Fonction	**DL**
$(1+u)^\alpha$	$1+\alpha u+\frac{1}{2!}\alpha(\alpha-1)u^2+\frac{1}{3!}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)u^3+o(u^3)$
$\ln(1+u)$	$u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3+o(u^3)$
$\exp(u)$	$1+u+\frac{1}{2!}u^2+\frac{1}{3!}u^3+o(u^3)$
$\cos(u)$	$1-\frac{1}{2!}u^2+\frac{1}{4!}u^4+o(u^4)$
$\sin(u)$	$u-\frac{1}{3!}u^3+\frac{1}{5!}u^5+o(u^5)$
$\cosh(u)$	$1+\frac{1}{2!}u^2+\frac{1}{4!}u^4+o(u^4)$
$\sinh(u)$	$u+\frac{1}{3!}u^3+\frac{1}{5!}u^5+o(u^5)$

TAB. 1 – Quelques développements limités au voisinage de 0.

Fonction	**TL**
$f(t)$	$F(p)$
$(-1)^n t^n f(t)$	$\frac{d^n}{dp^n}F(p)$
$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p)-p^{n-1}f(0^+)-\ldots-f^{(n-1)}(0^+)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(p)}{p}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(p)dp$
$e^{at}f(t)$	$F(p-a)$
$f(t-a)U(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$
$f\left(\frac{t}{k}\right)$	$kF(kp)$
$\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(p)G(p)$

TAB. 2 – Quelques transformées de Laplace usuelles.

Fonction	**TZ**
$f(n)$	$F(z)$
$f(n-n_0)$	$z^{-n_0}F(z)$
$a^n f(n)$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$
$nf(n)$	$-z\frac{dF(z)}{dz}$
$f(n)*g(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(k)g(n-k)$	$F(z)G(z)$

TAB. 3 – Quelques transformées en Z usuelles.