Examen de Variable Complexe **25 Mars 2010**

Les 4 exercices sont indépendants. Seule une feuille A4 recto-verso est autorisée.

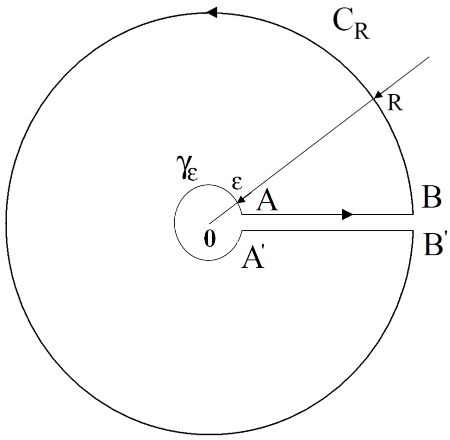

FIG. 1 – Contour d'intégration de $f(z)$.

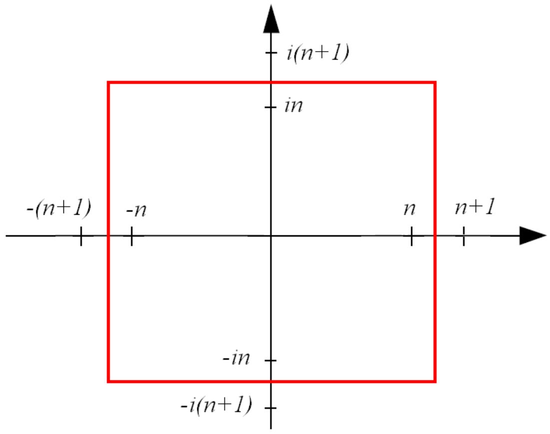

FIG. 2 – Contour d'intégration de $g(z)$.

Exercice 1 : Calcul intégral

Le but de cet exercice est de calculer :
$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx.$$

1. Dans $\mathbb{C}\backslash]0;+\infty[$, définir la détermination de $z^{1/2}$ qui prend des valeurs réelles positives sur le bord supérieur de la coupure.
2. Nous allons appliquer le théorème des résidus à la fonction $f(z) = \frac{z^{1/2}}{1+z^2}$ avec le contour représenté sur la Figure 1 (sur cette figure, AB se trouve sur le bord supérieur de la coupure). Pour cela :
   (a) Déterminer les résidus de la fonction en ses points singuliers isolés situés à l'intérieur du contour.
   (b) Démontrer avec soin que les intégrales de $f(z)$ sur les contours circulaires C_R et γ_ϵ tendent vers 0 lorsque $R \to +\infty$ et $\epsilon \to 0$.
   (c) En déduire la valeur de l'intégrale I_1.

Exercice 2 : Calcul de série

Le but de cet exercice est de calculer la série :
$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3 \tanh(n\pi)}.$$

Pour calculer cette série, on introduit classiquement les fonctions
$$f(z) = \frac{1}{z^3 \tanh(\pi z)} \quad \text{et} \quad \phi(z) = \frac{\pi}{\tan(\pi z)}$$
et on pose $g(z) = f(z)\phi(z)$.

1. Appliquer le théorème des résidus à la fonction $g(z)$ le long du contour fermé représenté sur la Figure 2.
2. Par passage à la limite, en justifiant proprement les résultats, en déduire la valeur de la série S_1.
   Indication : on rappelle que les premiers termes des développements de Taylor des fonctions $\tan(x)$ *et* $\tanh(x)$ *sont*
$$\begin{aligned} \tan(x) &= x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \ldots \\ \tanh(x) &= x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 - \ldots \end{aligned}$$

Exercice 3 : Étude d'une corde vibrante

Une corde infiniment longue fixée à son extrémité $x = 0$ est initialement au repos le long d'un axe (Ox). Pour tout instant $t > 0$, l'extrémité de la corde subit alors une excitation $e(t)$ en $x = 0$ représentée par un déplacement le long de l'axe (Oy). Naturellement, ce déplacement vertical se propage le long de la corde, comme illustré sur la Figure 3. Le problème considéré dans cet exercice consiste à déterminer le déplacement $y(x,t)$ en tout point $x > 0$ de la corde et à tout instant $t > 0$.

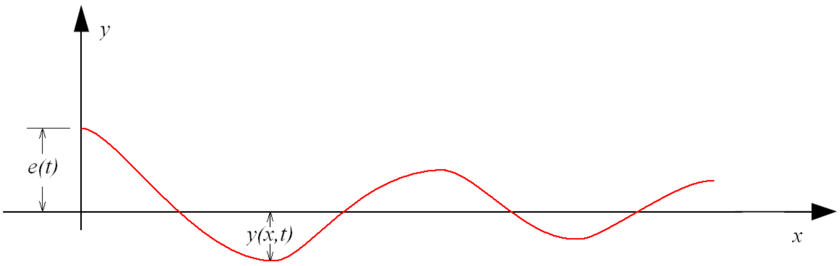

FIG. 3 – Corde vibrante : un mouvement vertical $e(t)$ est appliqué à son extrémité $x = 0$.

L'analyse physique du phénomène de vibration permet d'écrire l'équation qui régit le déplacement unidirectionnel de la corde :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}, \qquad x > 0,\ t > 0, \tag{1}$$

avec les conditions aux limites $\left[\frac{\partial^n y(x,t)}{\partial t^n}\right]_{t=0} = 0$ pour tout $n \geq 0$ et $y(0,t) = e(t)$ pour tout $t > 0$. La constante réelle $a > 0$ dépend de la rigidité de la corde.

1. Réécrire l'équation de déplacement (1) sous forme d'une équation différentielle en $Y(x,p) = \mathrm{TL}\left[y(x,t)\right]$.
2. On note $E(p) = \mathrm{TL}\left[e(t)\right]$ et on rappelle que la solution générale d'une équation différentielle du type $\frac{d^2 z(u)}{du^2} - \gamma^2 z(u) = 0$ est de la forme
$$z(u) = c_1 e^{\gamma u} + c_2 e^{-\gamma u}.$$
   (a) Donner $Y(x,p)$, solution générale de l'équation différentielle trouvée à la question 1.
   (b) On admet que le déplacement de la corde est **borné**. Montrer que les conditions imposées aux limites permettent alors d'obtenir la constante c_1.
   (c) En déduire c_2 puis une expression générale de $y(x,t)$ en fonction de $e(t)$ et a. Interpréter le résultat.

Exercice 4 : Filtrage linéaire

1. Effectuer une décomposition en élément simple de $H(z)/z^2$ où $H(z) = \frac{1}{6-5z^{-1}+z^{-2}}$.
2. En utilisant le théorème du retard (propriété de décalage temporel), déduire de la question précédente la réponse impulsionnelle $h(n)$ du filtre linéaire **stable** et **causal** qui admet $H(z)$ comme fonction de transfert. On indiquera précisément le domaine de convergence associé.

   Indication : on rappelle que

$$\mathrm{TZ}^{-1}\left[\frac{1}{1-az^{-1}}\right] = \begin{cases} a^n u(n), & \text{pour } |z| > |a|, \\ -a^n u(-n-1), & \text{pour } |z| < |a|, \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad u(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $u(n)$ est l'échelon unité

$$u(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. *Question bonus : Retrouver le résultat de la question 2 par inversion directe de la transformée en Z.*

Fonction	**TL**
$f(t)$	$F(p)$
$(-1)^n t^n f(t)$	$\frac{d^n}{dp^n}F(p)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1}f(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(p)}{p}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(p)dp$
$e^{at}f(t)$	$F(p-a)$
$f(t-a)U(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$
$f\left(\frac{t}{k}\right)$	$kF(kp)$
$\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(p)G(p)$

TAB. 1 – Quelques transformées de Laplace usuelles.

Fonction	**TZ**
$f(n)$	$F(z)$
$f(n-n_0)$	$z^{-n_0}F(z)$
$a^n f(n)$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$
$nf(n)$	$-z\frac{dF(z)}{dz}$
$f(n) * g(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)g(n-k)$	$F(z)G(z)$

TAB. 2 – Quelques transformées en Z usuelles.