Examen de Variable Complexe **19 Mars 2009**

Les 3 exercices sont indépendants. Une feuille A4 recto-verso est autorisée.

Exercice 1 : Calcul intégral

Le but de cet exercice est de calculer : $$I_1 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln x}{1+x^2}\right)^2 dx.$$

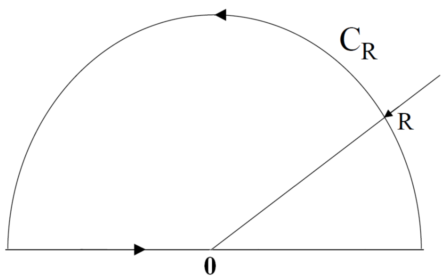

FIG. 1 – Contour d'intégration de $g(z)$.

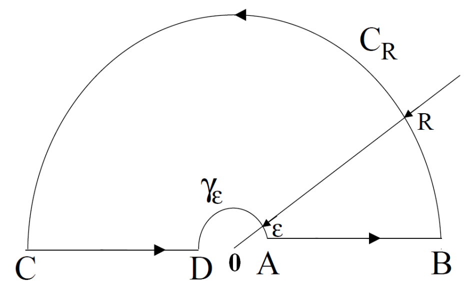

FIG. 2 – Contour d'intégration de $f(z)$.

1. A l'aide du théorème des résidus appliqué à la fonction $g(z) = \left(\frac{1}{1+z^2}\right)^2$ avec le contour de la Figure 1, montrer que :
$$J = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}.$$
2. Dans $\mathbb{C}\backslash]0;+\infty[$, définir la détermination de $\log z$ qui prend des valeurs réelles sur le bord supérieur de la coupure.
3. Nous allons appliquer le théorème des résidus à la fonction $f(z) = \left(\frac{\log z}{1+z^2}\right)^2$ avec le contour représenté sur la Figure 2 (sur cette figure, AB se trouve sur le bord supérieur de la coupure). Pour cela :
   (a) Déterminer les résidus de la fonction en ses points singuliers isolés situés à l'intérieur du contour.
   (b) Démontrer avec soin que les intégrales de $f(z)$ sur les contours circulaires C_R et γ_ϵ tendent vers 0 lorsque $R \to +\infty$ et $\epsilon \to 0$.
   (c) En utilisant le résulat de la question 1, en déduire la valeur de l'intégrale I_1 ainsi que la valeur de l'intégrale :
$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} dx.$$

Exercice 2 : Conduction de chaleur dans un solide

Un solide semi-infini représenté sur la Figure 3 est initialement à la température 0°C. A partir de l'instant $t = 0$, une température constante $u_0 > 0$ est continuellement appliquée sur sa surface $x = 0$. Le problème considéré dans cet exercice consiste à déterminer la température en tout point x de ce solide et à tout instant $t > 0$.

FIG. 3 – Solide semi-infini.

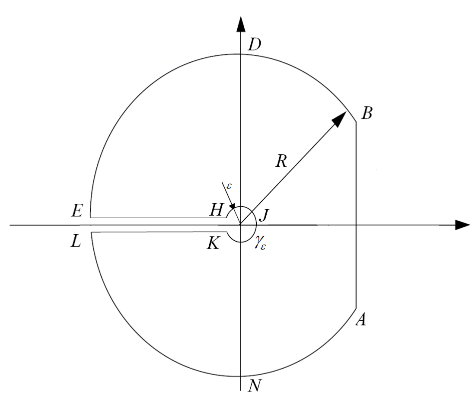

FIG. 4 – Contour de Bromwich.

A. Transformée de Laplace inverse

On se propose tout d'abord de calculer la transformée de Laplace inverse de la fonction :

$$F(p) = \frac{\exp\left(-a\sqrt{p}\right)}{p}, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

1. (a) Dans $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0[$, définir la détermination de $F(p)$ qui prend des valeurs réelles sur l'axe $(0x^+)$.
   (b) Comment s'appelle la détermination choisie ?
   (c) Déterminer l'abscisse de convergence simple de $F(p)$.
2. Pour calculer la transformée de Laplace inverse de $F(p)$, nous allons utiliser la formule d'inversion sur le contour de Bromwich $\Gamma_{R,\epsilon} \triangleq AB \cup BDE \cup EH \cup \gamma_\epsilon \cup KL \cup LNA$ représenté sur la Figure 3.
   (a) En utilisant un théorème du cours, montrer proprement que :

$$\lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ R \to +\infty}} \int_{BDE \cup LNA} e^{pt} F(p) dp = 0.$$

   (b) Montrer qu'avec la détermination choisie :

$$\lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ R \to +\infty}} \int_{EH \cup KL} e^{pt} F(p) dp = 2i\pi \mathrm{erf}\left(\frac{a}{2}\sqrt{t}\right), \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{erf}\left(\frac{a}{2}\sqrt{t}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x} \sin\left(a\sqrt{x}\right) dx.$$

   (c) En déduire $f(t) = \mathrm{TL}^{-1}[F(p)]$ en fonction de la fonction $\mathrm{erf}(\cdot)$.

B. Résolution du problème de conduction

L'équation de conduction unidimensionelle de la chaleur dans le solide semi-infini s'écrit :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

où $u(x,t)$ est la température du solide à l'instant t au point x, et k est une constante de diffusion qui dépend de la conduction thermique du matériau et de sa densité.

1. Réécrire l'équation de conduction (1) sous forme d'une équation différentielle en $U(x,p) = \mathrm{TL}[u(x,t)]$.
2. On rappelle que la solution générale de l'équation différentielle $\frac{d^2 U(x,p)}{dx^2} - a^2 U(x,p) = 0$ est de la forme

$$U(x,p) = c_1(p) e^{ax} + c_2(p) e^{-ax}.$$

   (a) Montrer que les conditions imposées aux limites permettent d'obtenir $U(0,p) = u_0/p$.
   (b) On admet que la température du solide $u(x,t)$ est bornée, et en particulier que $\lim_{x \to +\infty} u(x,t) < +\infty$. En déduire $c_1(p)$ et $c_2(p)$ puis une expression générale de $U(x,p)$ en fonction de u_0 et de k.
3. D'après le résultat obtenu dans la partie A, déterminer la température $u(x,t)$ en tout point x du solide à tout instant t.

Exercice 3 : Filtrage linéaire

Soit $u(n)$ l'échelon de Heaviside défini par $u(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Si a est un réel tel que $a \in]0,1[$, rappeler les transformées en Z respectives des signaux $a^n u(n)$ et $n a^n u(n)$.
2. Déterminer la transformée en Z du signal "rampe" défini par $r(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.
3. On considére le signal $y(n)$ défini récursivement par

$$y(n) = 2y(n-1) + r(n).$$

   (a) Montrer que $y(n)$ est la sortie d'un filtre linéaire d'entrée $r(n)$ et de fonction de transfert $H(z)$ que l'on précisera.
   (b) A l'aide des questions 1) et 2), déterminer l'expression de $y(n)$ lorsque la région de convergence de $H(z)$ est de la forme $|z| > 2$.

Fonction	**TL**
$f(t)$	$F(p)$
$(-1)^n t^n f(t)$	$\frac{d^n}{dp^n}F(p)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1}f(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(p)}{p}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(p)dp$
$e^{at}f(t)$	$F(p-a)$
$f(t-a)U(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$
$f\left(\frac{t}{k}\right)$	$kF(kp)$
$\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(p)G(p)$

TAB. 1 – Quelques transformées de Laplace usuelles.

Fonction	**TZ**
$f(n)$	$F(z)$
$f(n-n_0)$	$z^{-n_0}F(z)$
$a^n f(n)$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$
$nf(n)$	$-z\frac{dF(z)}{dz}$
$f(n) * g(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)g(n-k)$	$F(z)G(z)$

TAB. 2 – Quelques transformées en Z usuelles.