Correction Examen Variable Complexe
1 GEA - 24 Mars 2006

Exercice 1

1) Pour définir les déterminations de $f(z) = [\log z]^2$, il suffit de poser $z = \rho e^{i(\theta+2k\pi)}$ et de choisir comme coupure l'axe $[0, +\infty[$, ce qui correspond à $\theta \in]0, 2\pi[$pour obtenir :

$$f_k(z) = [\ln \rho + i(\theta + 2k\pi)]^2$$

On choisit par exemple la détermination principale du logarithme qui correspond à $k = 0$. Sur le bord supérieur de la coupure, on a $\theta = 0$ et $\rho = x$, d'où

$$f_0(z) = [\ln x]^2$$

Sur le bord inférieur de la coupure, on a $\theta = 2\pi$ et $\rho = x$, d'où

$$f_0(z) = [\ln x + 2i\pi]^2$$

2) Les points singuliers isolés de $g(z) = \frac{[\log z]^2}{z^4+1}$ sont les racines de $z^4 + 1 = 0$, c'est-à-dire

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} \text{ et } z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

Ce sont tous des des pôles d'ordre 1. En utilisant la détermination de $f(z) = [\log z]^2$ définie ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}
[\log z_1]^2 &= \left(i\frac{\pi}{4}\right)^2 = -\frac{\pi^2}{16} \\
[\log z_2]^2 &= \left(i\frac{3\pi}{4}\right)^2 = -\frac{9\pi^2}{16} \\
[\log z_3]^2 &= \left(i\frac{5\pi}{4}\right)^2 = -\frac{25\pi^2}{16} \\
[\log z_4]^2 &= \left(i\frac{7\pi}{4}\right)^2 = -\frac{49\pi^2}{16}
\end{aligned}$$

Les résidus de g en ces points se calculent alors facilement à l'aide de l'expression :

$$\text{res}g\,(z_k) = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} = \frac{[\log z_k]^2}{4z_k^3}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\text{res}g\,(z_1) &= -\frac{\pi^2}{4\times 16}\exp\left(-3i\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi^2}{64}\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i) \\
\text{res}g\,(z_2) &= -\frac{9\pi^2}{4\times 16}\exp\left(-9i\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{9\pi^2}{64}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{9\pi^2}{64}\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \\
\text{res}g\,(z_3) &= -\frac{25\pi^2}{4\times 16}\exp\left(-15i\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{25\pi^2}{64}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{25\pi^2}{64}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\
\text{res}g\,(z_4) &= -\frac{49\pi^2}{4\times 16}\exp\left(-21i\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{49\pi^2}{64}\exp\left(3i\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{49\pi^2}{64}\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)
\end{aligned}$$

3) La fonction g est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\left([0,+\infty[\cup\{z_1,z_2,z_3,z_4\}\right)$. Donc le théorème des résidus peut s'appliquer à la fonction g sur le contour proposé (qui contient les quatre points singuliers isolés) et s'écrit

$$\begin{aligned}
\int_{AB\cup C_R^+\cup DC\cup\gamma_\varepsilon^-} g(z)dz &= (2i\pi)\sum_{k=1}^{4}\operatorname{res}g\left(z_k\right)\\
&= \frac{\pi^2}{64}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2i\pi\right)\left[1+i-9+9i-25-25i+49-49i\right]\\
&= \frac{i\pi^3\sqrt{2}}{64}\left[16-64i\right]\\
&= \frac{i\pi^3\sqrt{2}}{4}+i\pi^3\sqrt{2}
\end{aligned}$$

De manière très classique, on paramètre le cercle γ_ε par $z=\varepsilon e^{i\theta}$ avec $\theta\in\,]0,2\pi[$. On a dans ce cas $\rho=\varepsilon$ et donc :

$$|zg(z)|=\left|\varepsilon\frac{(\ln\varepsilon+i\theta)^2}{\varepsilon^4e^{4i\theta}+1}\right|$$

En utilisant les majorations classiques

$$\begin{aligned}
|\ln\varepsilon+i\theta| &\leq |\ln\varepsilon|+2\pi=-\ln\varepsilon+2\pi \text{ (car } \varepsilon \text{ “petit”)}\\
\left|\varepsilon^4e^{4i\theta}+1\right| &\geq \left|1-\left|\varepsilon^4e^{4i\theta}\right|\right|=1-\varepsilon^4 \text{ (car } \varepsilon \text{ “petit”)}
\end{aligned}$$

on obtient sur le cercle γ_ε la majoration

$$0\leq|zg(z)|\leq\frac{\varepsilon\left(-\ln\varepsilon+2\pi\right)^4}{1-\varepsilon^4}\underset{\varepsilon\to0}{\to}0$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{\gamma_\varepsilon}|zg(z)|=0$$

Le premier lemme de Jordan permet alors de conclure à

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon}g(z)dz=0}$$

On fait de même sur le cercle C_R avec $z=Re^{i\theta}$. Puisque $\left|\varepsilon^4e^{4i\theta}+1\right|\geq|R^4-1|=R^4-1$ (car R “grand”), on a :

$$0\leq|zg(z)|\leq\frac{R\left(\ln R+2\pi\right)^2}{R^4-1}\underset{R\to\infty}{\to}0,$$

d'où

$$\lim_{R\to+\infty}\sup_{C_R}|zg(z)|=0$$

D'après le premier lemme de Jordan, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}g(z)dz=0}$$

Puisque les intégrales sur C_R et sur γ_ε tendent vers 0, lorsque $R \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$, on obtient par passage à la limite dans l'égalité provenant du théorème des résidus

$$\lim_{R\to+\infty,\varepsilon\to 0}\int_{AB} g(z)dz + 0 - \lim_{R\to+\infty,\varepsilon\to 0}\int_{CD} g(z)dz + 0 = \frac{i\pi^3\sqrt{2}}{4} + \pi^3\sqrt{2}$$

Mais sur AB, on a d'après ce qui précède

$$g(z) = \frac{[\ln x]^2}{x^4+1}$$

De même, sur CD

$$g(z) = \frac{[\ln(x) + 2i\pi]^2}{x^4+1}$$

On en déduit

$$\int_0^{+\infty}\frac{[\ln x]^2}{x^4+1}dx - \int_0^{+\infty}\frac{[\ln x + 2i\pi]^2}{x^4+1}dx = \frac{i\pi^3\sqrt{2}}{4} + \pi^3\sqrt{2}$$

On obtient donc

$$-4i\pi\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^4+1}dx + 4\pi^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx = \frac{i\pi^3\sqrt{2}}{4} + \pi^3\sqrt{2}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires de l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^4+1}dx = -\frac{\pi^2}{16}\sqrt{2} \\ J &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{4}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Exercice 2

1) On sait que pour une fonction f définie de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, le théorème de dérivation s'écrit

$$\begin{aligned} TL\left[f'(t)\right] &= pF(p) - f(0^+) \\ TL\left[f''(t)\right] &= p\left[pF(p) - f(0^+)\right] - f'(0^+) \\ &= p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+) \end{aligned}$$

donc en prenant la transformée de Laplace de l'équation différentielle, on obtient

$$\begin{aligned} p^2F(p) - p - 2 + 3\left(pF(p) - 1\right) + 2F(p) &= G(p) \\ \left(p^2 + 3p + 2\right)F(p) - p - 5 &= G(p) \end{aligned}$$

d'où

$$F(p) = \frac{p+5}{p^2+3p+2} + \frac{G(p)}{p^2+3p+2} \tag{1}$$

Le trinome $p^2 + 3p + 2$ se factorise de la façon suivante

$$p^2 + 3p + 2 = (p+2)(p+1)$$

On a donc

$$A(p) = \frac{p+5}{(p+2)(p+1)} \text{ et } B(p) = \frac{1}{(p+2)(p+1)}$$

2) La décomposition en éléments simples de $A(p)$ conduit à

$$A(p) = \frac{a_1}{p+1} + \frac{a_2}{p+2},$$

avec

$$\begin{aligned} a_1 &= \lim_{p \to -1} (p+1) A(p) = \frac{5-1}{2-1} = 4 \\ a_2 &= \lim_{p \to -2} (p+2) A(p) = \frac{5-2}{1-2} = -3 \end{aligned}$$

On en déduit

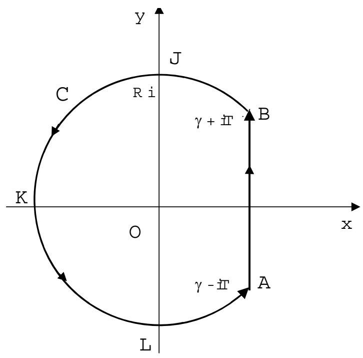
$$a(t) = \left(4e^{-t} - 3e^{-2t}\right) u(t)$$

3) La fonction $g(t) = e^{-3t}u(t)$ admet pour transformée de Laplace $G(p) = \frac{1}{p+3}$, donc

$$G(p)B(p) = \frac{1}{(p+3)(p+2)(p+1)}$$

On désire appliquer la formule d'inversion de la transformée de Laplace à la fonction $G(p)B(p)$. Répondre aux questions suivantes :

- Le contour de Bromwich correspondant à ce problème est



Contour de Bromwich

où le segment AB est d'équation $x = c$, avec $c > -1$,

- $G(p)B(p)$ s'écrit $\frac{N(p)}{D(p)}$ avec

$$N(p) = 1 \text{ et } D(p) = (p+3)(p+2)(p+1)$$

Puisque $\deg(N) = 0 < \deg(D) = 3$, l'intégrale sur le contour circulaire tend vers 0 lorsque $R \to \infty$,

- La fonction $G(p)B(p)e^{pt}$ admet comme points singuliers isolés $p_1 = -1, p_2 = -2$ et $p_3 = -3$. Les résidus en ces points se calculent simplement car ces points singuliers sont des pôles simples

$$\begin{aligned}
\text{res}\left\{G(p)B(p)e^{pt}\right\}(-1) &= \lim_{p\to-1}(p+1)\,G(p)B(p)e^{pt} = \frac{1}{2}e^{-t} \\
\text{res}\left\{G(p)B(p)e^{pt}\right\}(-2) &= \lim_{p\to-2}(p+2)\,G(p)B(p)e^{pt} = -e^{-2t} \\
\text{res}\left\{G(p)B(p)e^{pt}\right\}(-3) &= \lim_{p\to-3}(p+3)\,G(p)B(p)e^{pt} = \frac{1}{2}e^{-3t}
\end{aligned}$$

- La solution de l'équation différentielle $f(t)$ s'écrit finalement

$$\begin{aligned}
f(t) &= a(t) + \frac{1}{2i\pi}\int_{D\uparrow} G(p)B(p)e^{pt}dp \\
&= a(t) + \sum_{p_i \text{ psi de } GB \text{ situé à l'intérieur de } BJCKLAB} \text{res}\left\{G(p)B(p)e^{pt}\right\}(p_i) \\
&= \left(4e^{-t} - 3e^{-2t}\right)u(t) + \left[\frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right]u(t) \\
&= \left(\frac{9}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)
\end{aligned}$$

Exercice 3

1) En prenant la transformée en Z de l'équation récurrente

$$y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = x(n), \qquad n > 0$$

on obtient

$$z^2Y(z) - 3zY(z) + 2Y(z) = X(z)$$

d'où

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \boxed{\frac{1}{z^2 - 3z + 2}}$$

Le dénominateur de cette fonction de transfert se factorise comme suit

$$H(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 1} = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

La fonction de transfert $H(z)$ possède donc deux pôles simples $z = 1$ et $z = 2$. Elle ne possède pas de zèro.

2) La formule d'inversion de la transformée en Z s'écrit :

$$\begin{aligned}
h(n) &= \sum \text{res}\left\{H(z)z^{n-1}\right\} \\
&= \sum \text{res}\left\{\frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)}\right\}
\end{aligned}$$

où les résidus sont calculés en tous les points singuliers isolés de $H(z)z^{n-1}$ situés à l'intérieur d'un contour fermé entourant le domaine de convergence. Dans cet exercice, le domaine de convergence est $|z| \geq 2$.

- Pour $n=0$, on a
$$h(0)=\sum \text{res}\left\{\frac{1}{z\,(z-1)\,(z-2)}\right\}$$
Les points singuliers de $H(z)z^{n-1}$ sont $z=0, z=1$ et $z=2$. Les résidus en ces points sont
$$\begin{aligned}
\text{res}\left\{H(z)z^{n-1}\right\}(0) &= \lim_{z\to 0} z\left[H(z)z^{n-1}\right]=\frac{1}{2}\\
\text{res}\left\{H(z)z^{n-1}\right\}(1) &= \lim_{z\to 1}(z-1)\left[H(z)z^{n-1}\right]=-1\\
\text{res}\left\{H(z)z^{n-1}\right\}(2) &= \lim_{z\to 2}(z-2)\left[H(z)z^{n-1}\right]=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$
On voit donc que
$$h(0)=\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}=0$$
- Pour $n\geq 1$, on a
$$\begin{aligned}
h(n) &= \text{res}\left\{\frac{z^{n-1}}{(z-1)\,(z-2)}\right\}(1)+\text{res}\left\{\frac{z^{n-1}}{(z-1)\,(z-2)}\right\}(2)\\
&= 1+2^{n-1}
\end{aligned}$$

4) La sortie du système notée $y(n)$ est telle que
$$y(n)=x(n)*h(n)\Leftrightarrow Y(z)=X(z)H(z)$$
Lorsque l'entrée est $x(n)=u(n)$, on a
$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}u(n)z^{-n}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}\\
&= \frac{1}{1-z^{-1}}\text{ pour }\left|z^{-1}\right|<1\Leftrightarrow |z|>1\\
&= \frac{z}{z-1}\text{ pour }|z|>1
\end{aligned}$$
On en déduit
$$Y(z)=\frac{z}{z-1}\frac{1}{(z-1)\,(z-2)}=\frac{z}{(z-1)^2\,(z-2)}$$
Pour trouver la sortie $y(n)$, il suffit d'inverser la transformée en Z ci-dessus. On a alors
$$\begin{aligned}
y(n) &= \sum \text{res}\left\{Y(z)z^{n-1}\right\}\\
&= \sum \text{res}\left\{\frac{z^n}{(z-1)^2\,(z-2)}\right\}
\end{aligned}$$

Pour $n \geq 0$, la fonction $\frac{z^n}{(z-1)^2(z-2)}$ admet un pôle simple $z=2$ et un pôle double $z=1$. Le résidu en $z=2$ se calcule simplement

$$\text{res}\left\{\frac{z^n}{(z-1)^2(z-2)}\right\}(2) = \lim_{z\to 2}\frac{z^n}{(z-1)^2} = 2^n$$

En utilisant le rappel, on a

$$\begin{aligned}
\text{res}\left\{\frac{z^n}{(z-1)^2(z-2)}\right\}(1) &= \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{z^n}{(z-1)^2(z-2)}\right]\Bigg|_{z=1} \\
&= \frac{d}{dz}\left[\frac{z^n}{z-2}\right]\Bigg|_{z=1} \\
&= \frac{nz^{n-1}(z-2)-z^n}{(z-2)^2}\Bigg|_{z=1} \\
&= -n-1
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\boxed{y(n) = -n-1+2^n, \qquad \forall n \geq 0}$$