Correction Examen GEA
25 mars 2005

Exercice 1

1) Pour définir les déterminations de $f(z) = \log z$, il suffit de poser $z = \rho e^{i(\theta+2k\pi)}$ pour obtenir :

$$f(z) = \ln \rho + i\,(\theta + 2k\pi)$$

On choisit comme coupure l'axe $[0, +\infty[$, ce qui correspond à $\theta \in\,]0, 2\pi[$. Au point $z = -1$, on a $\theta = \pi$ et $\rho = 1$, d'où

$$f(-1) = i\,(\pi + 2k\pi)$$

Pour avoir $i\pi$ au point $z = -1$, il suffit donc de choisir $k = 0$ et donc

$$f(z) = \boxed{\ln \rho + i\theta}$$

avec $\theta = 0$ sur le bord supérieur de la coupure $[0, +\infty[$. Sur le bord supérieur de la coupure, on a $\theta = 0, \rho = x$ et $z = x$, d'où

$$\boxed{f(z) = \ln x}$$

Sur l'axe $]-\infty, 0[$, on a $\theta = \pi$ et $\rho = -x$, d'où

$$\boxed{f(z) = \ln(-x) + i\pi}$$

2)Les points singuliers isolés de $g(z) = \frac{[\log z]^2}{z^2+1}$ sont $z = i$ et $z = -i$, qui sont tous les deux des pôles d'ordre 1. En utilisant la détermination de $f(z) = \log z$ définie ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}
\log i &= \ln(1) + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2} \\
\log(-i) &= \ln(1) + i\frac{3\pi}{2} = i\frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

Les résidus de g en ces points se calculent alors facilement :

$$\begin{aligned}
\text{res}g\,(i) &= \lim_{z\to i} (z - i)\,g(z) \\
&= \lim_{z\to i} \frac{[\log z]^2}{z + i} \\
&= \frac{-\pi^2/4}{2i} = \boxed{\tfrac{\pi^2}{8} i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{res}g\,(-i) &= \lim_{z\to -i} (z + i)\,g(z) \\
&= \lim_{z\to -i} \frac{[\log z]^2}{z - i} \\
&= \frac{-9\pi^2/4}{-2i} = \boxed{-\tfrac{9\pi^2}{8} i}
\end{aligned}$$

3) La fonction g est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\left([0,+\infty[\cup\{-i,i\}\right)$. Donc le théorème des résidus peut s'appliquer à la fonction g sur le contour proposé (qui contient un seul point singulier isolé $z=i$) et s'écrit

$$\int_{AB\cup C_R^+\cup DC\cup\gamma_\varepsilon^-} g(z)dz=(2i\pi)\operatorname{res}g\,(i)$$

De manière très classique, on paramètre le cercle γ_ε par $z=\varepsilon e^{i\theta}$ avec $\theta\in\,]0,2\pi[$. On a dans ce cas $\rho=\varepsilon$ et donc :

$$|zg(z)|=\left|\varepsilon\frac{(\ln\varepsilon+i\theta)^2}{\varepsilon^2e^{2i\theta}+1}\right|$$

En utilisant les majorations classiques

$$\begin{aligned}|\ln\varepsilon+i\theta| &\leq |\ln\varepsilon|+2\pi=-\ln\varepsilon+2\pi \text{ (car } \varepsilon \text{ “petit”)}\\ \left|\varepsilon^2e^{2i\theta}+1\right| &\geq \left|1-\left|\varepsilon^2e^{2i\theta}\right|\right|=1-\varepsilon^2 \text{ (car } \varepsilon \text{ “petit”)}\end{aligned}$$

on obtient sur le cercle γ_ε la majoration

$$0\leq|zg(z)|\leq\frac{\varepsilon\left(-\ln\varepsilon+2\pi\right)^2}{1-\varepsilon^2}\underset{\varepsilon\to0}{\to}0$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{\gamma_\varepsilon}|zg(z)|=0$$

Le premier lemme de Jordan permet alors de conclure à

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon}g(z)dz=0}$$

On fait de même sur le cercle C_R avec $z=Re^{i\theta}$. Puisque $\left|\varepsilon^2e^{2i\theta}+1\right|\geq\left|R^2-1\right|=R^2-1$ (car R “grand”), on a :

$$0\leq|zg(z)|\leq\frac{R\left(\ln R+2\pi\right)^2}{R^2-1}\underset{R\to\infty}{\to}0,$$

d'où

$$\lim_{R\to+\infty}\sup_{C_R}|zg(z)|=0$$

D'après le premier lemme de Jordan, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}g(z)dz=0}$$

Puisque les intégrales sur C_R et sur γ_ε tendent vers 0, lorsque $R\to+\infty$ et $\varepsilon\to0$, on obtient par passage à la limite dans l'égalité provenant du théorème des résidus

$$\lim_{R\to+\infty,\varepsilon\to0}\int_{AB}g(z)dz+0+\lim_{R\to+\infty,\varepsilon\to0}\int_{DC}g(z)dz+0=(2i\pi)\,\frac{\pi^2}{8}i$$

Mais sur AB, on a d'après ce qui précède

$$g(z)=\frac{[\ln x]^2}{x^2+1}$$

De même, sur CD

$$g(z) = \frac{[\ln(-x) + i\pi]^2}{x^2+1}$$

On en déduit

$$\int_0^{+\infty} \frac{[\ln x]^2}{x^2+1} dx + \lim_{R\to+\infty,\varepsilon\to 0} \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{[\ln(-x) + i\pi]^2}{x^2+1} dx = -\frac{\pi^3}{4}$$

En faisant le changement de variables $u = -x$ dans la seconde intégrale, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{[\ln x]^2}{x^2+1} dx + \lim_{R\to+\infty,\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{[\ln(u) + i\pi]^2}{u^2+1} du = -\frac{\pi^3}{4}$$

soit

$$I + \int_0^{+\infty} \frac{[\ln u]^2}{u^2+1} du + (2i\pi) \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2+1} du - \pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2+1} du = -\frac{\pi^3}{4}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires de l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned} 2I - \pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2+1} du &= -\frac{\pi^3}{4} \\ (2i\pi) \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2+1} du &= 0 \end{aligned}$$

La première égalité donne

$$\begin{aligned} 2I &= -\frac{\pi^3}{4} + \pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2+1} du \\ &= -\frac{\pi^3}{4} + \pi^2 \left[\mathrm{Arctg} u\right]_0^{\infty} \\ &= -\frac{\pi^3}{4} + \pi^2 \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3}{4} \end{aligned}$$

d'où

$$I = \frac{\pi^3}{8}$$

Exercice 2

1) En prenant la transformée en Z de l'équation récurrente

$$y(n+3) - 2y(n+2) + y(n+1) = x(n), \qquad n > 0$$

on obtient

$$z^3 Y(z) - 2z^2 Y(z) + zY(z) = X(z)$$

d'où

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \boxed{\frac{1}{z^3 - 2z^2 + z}}$$

Le dénominateur de cette fonction de transfert se factorise comme suit

$$H(z) = \frac{1}{z(z^2 - 2z + 1)} = \frac{1}{z(z-1)^2}$$

La fonction de transfert $H(z)$ possède donc un pôle simple $z=0$ et un pôle double $z=1$. Elle ne possède pas de zéro.

2) La formule d'inversion de la transformée en Z s'écrit :

$$\begin{aligned} h(n) &= \sum \operatorname{res}\left\{H(z)z^{n-1}\right\} \\ &= \sum \operatorname{res}\left\{\frac{z^{n-2}}{(z-1)^2}\right\} \end{aligned}$$

où les résidus sont calculés en tous les points singuliers isolés de $H(z)z^{n-2}$ situés à l'intérieur d'un contour fermé entourant le domaine de convergence. Dans cet exercice, le domaine de convergence est $|z| \geq 1$ et pour $n \geq 2$, la fonction $H(z)z^{n-1}$ possède un seul point singulier isolé qui est $z=1$. Donc, on a

$$h(n) = \operatorname{res}\left\{\frac{z^{n-2}}{(z-1)^2}\right\}(1), \qquad \forall n \geq 2$$

Le point $z=1$ étant un pôle double de $\frac{z^{n-2}}{(z-1)^2}$, le résidu se calcule comme suit

$$\begin{aligned} \operatorname{res}\left\{\frac{z^{n-2}}{(z-1)^2}\right\}(1) &= \lim_{z\to 1}\frac{d\left\{(z-1)^2 H(z)z^{n-1}\right\}}{dz} \\ &= \lim_{z\to 1}\frac{d\left\{z^{n-2}\right\}}{dz} \\ &= \boxed{n-2} \end{aligned}$$

Même si l'expression de $h(n)$ pour $n \in \{0,1\}$, n'était pas demandée, nous montrons dans ce qui suit comment on peut la déterminer. Pour $n=1$, on a

$$\begin{aligned} h(1) &= \sum \operatorname{res}\left\{H(z)z^{1-1}\right\} \\ &= \sum \operatorname{res}\left\{\frac{1}{z\,(z-1)^2}\right\} \end{aligned}$$

où les résidus sont calculés en tous les points singuliers isolés de $\frac{1}{z(z-1)^2}$ situés à l'intérieur d'un contour fermé entourant le domaine de convergence. Dans cet exercice, le domaine de convergence est $|z| \geq 1$ et la fonction $\frac{1}{z(z-1)^2}$ possède deux points singuliers isolés $z=0$ et $z=1$. On a donc

$$h(1) = \operatorname{res}\left\{\frac{1}{z\,(z-1)^2}\right\}(0) + \operatorname{res}\left\{\frac{1}{z\,(z-1)^2}\right\}(1)$$

Puisque $z=0$ est un pôle simple de $\frac{1}{z(z-1)^2}$, on a

$$\operatorname{res}\left\{\frac{1}{z\,(z-1)^2}\right\}(0) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{(z-1)^2} = 1$$

De même, $z=1$ étant un pôle double de $\frac{1}{z(z-1)^2}$, on a

$$\operatorname{res}\left\{\frac{1}{z\,(z-1)^2}\right\}(1) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z}\right] = -1$$

On en conclut

$$\boxed{h\left(1\right)=0}$$

Pour $n=0$, on obtient de la même manière

$$\begin{aligned}
h(2) &= \sum \operatorname{res}\left\{H(z)z^{0-1}\right\} \\
&= \sum \operatorname{res}\left\{\frac{1}{z^2\left(z-1\right)^2}\right\} \\
&= \operatorname{res}\left\{\frac{1}{z^2\left(z-1\right)^2}\right\}(0)+\operatorname{res}\left\{\frac{1}{z^2\left(z-1\right)^2}\right\}(1) \\
&= 2-2=0
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{h\left(0\right)=0}$$

et par suite

$$\boxed{h\left(n\right)=\left(n-2\right)u(n-2)}$$

3) La sortie du système notée $y(n)$ est telle que

$$y(n)=x(n)*h(n)\Leftrightarrow Y(z)=X(z)H(z)$$

Lorsque l'entrée est $x(n)=u(n)$, on a

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} u(n)z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\
&= \frac{1}{1-z^{-1}} \text{ pour } \left|z^{-1}\right|<1\Leftrightarrow |z|>1 \\
&= \frac{z}{z-1} \text{ pour } |z|>1
\end{aligned}$$

On en déduit

$$Y(z)=\frac{z}{z-1}\frac{1}{z\left(z-1\right)^2}=\frac{1}{\left(z-1\right)^3}$$

Pour trouver la sortie $y(n)$, il suffit d'inverser la transformée en Z ci-dessus. On a alors

$$\begin{aligned}
y(n) &= \sum \operatorname{res}\left\{Y(z)z^{n-1}\right\} \\
&= \sum \operatorname{res}\left\{\frac{z^{n-1}}{\left(z-1\right)^3}\right\}
\end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$, la fonction $\frac{z^{n-1}}{(z-1)^3}$ admet un unique pôle $z = 1$ d'ordre $p = 3$. En utilisant le rappel, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}\left\{\frac{z^{n-1}}{(z-1)^3}\right\}(1) &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-1)^3\frac{z^{n-1}}{(z-1)^3}\right]\Bigg|_{z=1} \\
&= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left[z^{n-1}\right]\Bigg|_{z=1} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left[(n-1)(n-2)z^{n-3}\right] \\
&= \frac{1}{2}(n-1)(n-2)
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\boxed{y(n) = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2), \qquad \forall n \geq 1}$$

Exercice 3

1) Pour définir les déterminations de $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p+1}}$, il suffit de poser $p+1 = \rho e^{i(\theta+2k\pi)}$ pour obtenir :

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{\rho}e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}e^{-\frac{i\theta}{2}}e^{-ik\pi}$$

On choisit comme coupure l'axe $]-\infty,-1]$, ce qui correspond à $\theta \in]-\pi,\pi[$. Au point $p = 0$, on a $\theta = 0$ et $\rho = 1$. Pour avoir 1 au point $p = 0$, il suffit donc de choisir $k = 0$ et donc

$$F(p) = \boxed{\tfrac{1}{\sqrt{\rho}}e^{-\frac{i\theta}{2}}}$$

avec $\theta = \pi$ sur le bord supérieur de la coupure $]-\infty,-1]$.

2.1) Sur l'arc de cercle C_R, on a $p+1 = \rho e^{i\phi}$, d'où

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}e^{-\frac{i\phi}{2}}$$

avec $\rho \in [R-1, R+1]$, d'où

$$|F(p)| < \frac{1}{\sqrt{R-1}} = \frac{1}{\sqrt{R}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{R}}}$$

Puisque

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{R}}} = 1,$$

il existe R_0 tel que

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{R}}} < 2, \qquad \forall R > R_0$$

d'où

$$|F(p)| < \frac{2}{\sqrt{R}}, \qquad \forall R > R_0$$

c'est-à-dire

$$|F(p)| < \frac{M}{R^k}, \qquad \forall R > R_0$$

avec $M = 2$ et $k = \frac{1}{2}$. On en déduit

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{pt} F(p) dp = 0, \qquad \forall t > 0$$

2.2) Sur le segment de droite CD, c'est-à-dire sur le bord supérieur de la coupure, on a $\theta = \pi, \rho = -1 - x$ et $p = x$. On en déduit

$$\begin{aligned} \int_{CD} e^{pt} F(p) dp &= \int_{-R}^{-1-\varepsilon} e^{xt} \frac{1}{\sqrt{-1-x}} e^{-i\frac{\pi}{2}} dx \\ &= -i \int_{-R}^{-1-\varepsilon} e^{xt} \frac{1}{\sqrt{-1-x}} dx \end{aligned}$$

Sur le segment de droite EF, c'est-à-dire sur le bord inférieur de la coupure, on a $\theta = -\pi, \rho = -1 - x$ et $p = x$. On en déduit

$$\begin{aligned} \int_{EF} e^{pt} F(p) dp &= \int_{-R}^{-1-\varepsilon} e^{xt} \frac{1}{\sqrt{-1-x}} e^{i\frac{\pi}{2}} dx \\ &= i \int_{-R}^{-1-\varepsilon} e^{xt} \frac{1}{\sqrt{-1-x}} dx \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \int_{CD} e^{pt} F(p) dp - \int_{EF} e^{pt} F(p) dp &= -2i \int_{-R}^{-1-\varepsilon} e^{xt} \frac{1}{\sqrt{-1-x}} dx \\ &\underset{\varepsilon\to 0, R\to\infty}{\longrightarrow} -2i \int_{-\infty}^{-1} e^{xt} \frac{1}{\sqrt{-1-x}} dx \end{aligned}$$

2.3) En utilisant le paramètrage classique $p + 1 = \varepsilon e^{i\theta}$ valable sur le cercle γ_ε, on a

$$\begin{aligned} \left|(p+1) e^{pt} F(p)\right| &= \left|\sqrt{p+1} e^{pt}\right| \\ &= \left|\sqrt{\varepsilon} e^{\frac{i\theta}{2}} \exp\left(\varepsilon t e^{i\theta} - t\right)\right| \\ &= \left|\sqrt{\varepsilon} e^{-t} \exp\left(\varepsilon t \cos\theta\right)\right| \\ &\leq \left|\sqrt{\varepsilon} e^{-t} \exp\left(\varepsilon t\right)\right| \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\gamma_\varepsilon} \left|(p+1) e^{pt} F(p)\right| = 0$$

Le premier lemme de Jordan permet alors de conclure à

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} e^{pt} F(p) dp = 0}$$

3) La formule d'inversion de la transformée de Laplace donne

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{D\uparrow} F(p)e^{pt}dp \\ &= \frac{1}{2i\pi}\lim_{R\to\infty}\int_{AB} F(p)e^{pt}dp \end{aligned}$$

Le théorème des résidus appliqué à la fonction $F(p)e^{pt}$ sur le domaine proposé dans l'énoncé s'écrit

$$\int_{AB\cup C_R\cup CD\cup\gamma_\varepsilon\cup FE} F(p)e^{pt}dp = 0,$$

car il n'y a aucune singularité à l'intérieur de $AB\cup C_R\cup CD\cup\gamma_\varepsilon\cup FE$. Par passage à la limite $\varepsilon\to 0, R\to\infty$, on obtient

$$2i\pi f(t) + 0 - 2i\int_{-\infty}^{-1} e^{xt}\frac{1}{\sqrt{-1-x}}dx + 0 = 0$$

d'où

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-1} e^{xt}\frac{1}{\sqrt{-1-x}}dx$$

Il paraît naturel de poser $u=\sqrt{-1-x}$ dans cette intégrale. On a alors

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi}\int_{+\infty}^{0} e^{-\left(u^2+1\right)t}\frac{1}{u}(-2u)du \\ &= \frac{2e^{-t}}{\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-u^2t}du \end{aligned}$$

En posant $v=u\sqrt{t}$, on a

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2e^{-t}}{\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-v^2}\frac{dv}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{2e^{-t}}{\sqrt{t}\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-t} \end{aligned}$$

L'original de la fonction $F(p)=\frac{1}{\sqrt{p+1}}$ est donc

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-t}u(t)$$