Partiel de Variable Complexe

Vendredi 25 mars 2005

Exercice 1

Le but de cet exercice est de déterminer

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{[\ln x]^2}{x^2+1} dx$$

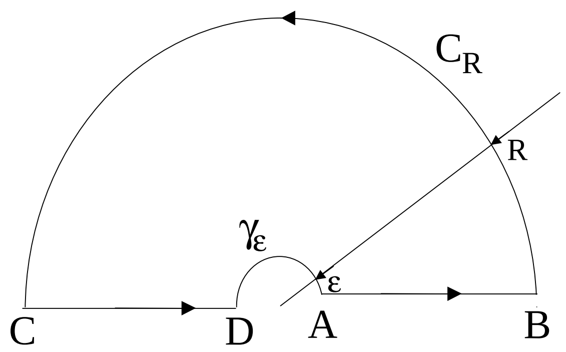
1) Définir la détermination de $f(z) = \log z$ qui prend la valeur $i\pi$ en $z = -1$ et qui admet comme coupure $[0, +\infty[$. Déterminer ensuite les valeurs de cette détermination sur le bord supérieur de la coupure ainsi que sur le demi axe $]-\infty, 0[$.

2) Déterminer les résidus de la fonction

$$g(z) = \frac{[\log z]^2}{z^2+1}$$

en ses.points singuliers isolés.

3) Appliquer le théorème des résidus à la fonction g sur le contour $AB \cup C_R \cup DC \cup \gamma_\varepsilon$ représenté ci-dessous (le segment AB se trouve sur le bord supérieur de la coupure tandis que le segment CD se trouve exactement sur l'axe des réels négatifs) :



Démontrer avec soin que les intégrales de g sur les contours circulaires C_R et γ_ε tendent vers 0 lorsque $R \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$ respectivement. En déduire la valeur de l'intégrale I recherchée.

Exercice 2

On considère l'équation récurrente

$$y(n+3) - 2y(n+2) + y(n+1) = x(n), \quad n > 0 \tag{1}$$

modélisant un système d'entrée $x(n)$ et de sortie $y(n)$. On supposera dans cet exercice que l'entrée et la sortie du système sont des fonctions causales.

1) Déterminer la fonction de transfert (appelée aussi transmittance) $H(z)$ de ce système et préciser les pôles et zéros de $H(z)$

2) On rappelle que la région de convergence d'un système dont la sortie et l'entrée sont causales (ce qui est le cas ici) est $|z| > \rho$, où ρ est le maximum des modules des pôles de ce système. Déterminer la réponse impulsionnelle du système notée $h(n)$ pour $n \geq 2$ en utilisant la formule d'inversion de la transformée en Z.

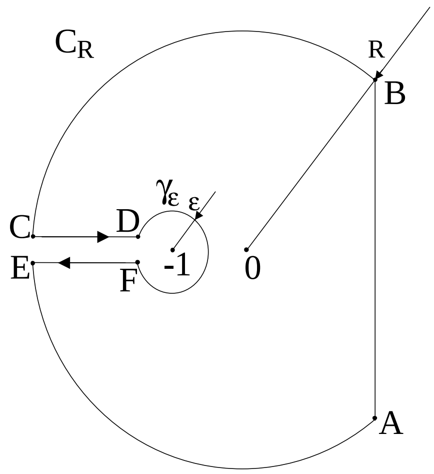
3) Soit $u(n)$ l'échelon de Heaviside défini par $u(n) = 1$ si $n \geq 0$ et $u(n) = 0$ si $n < 0$. Déterminer $y(n)$ pour $n \geq 1$ lorsque l'entrée du système (1) est $x(n) = u(n)$ (on appliquera la formule d'inversion de la transformée en Z et on pourra calculer le résidu intervenant dans cette formule à l'aide de l'expression $\mathrm{res} f(a) = \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left[(z-a)^p f(z)\right]\Big|_{z=a}$ valable pour un pôle d'ordre p).

Exercice 3

Le but de cet exercice est de déterminer la transformée de Laplace inverse de $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p+1}}$.

1) Définir la détermination de $F(p)$ qui vaut 1 en $p = 0$ et qui admet comme coupure l'axe $]-\infty, -1[$.

2) Appliquer le théorème des résidus à la fonction $G(p) = F(p)e^{pt}$ sur le contour ci-dessous



2.1) On sait que s'il existe $k > 0, M > 0$ et $R_0 > 0$ tels que pour tout $p \in C_R$, on a $|F(p)| < \frac{M}{R^k}$, $\forall R > R_0$, alors

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{pt}F(p)dp = 0, \qquad \forall t > 0$$

Montrer que la fonction $F(p) = (p+1)^{-1/2}$ vérifie cette condition.

2.2) Exprimer l'intégrale $\int e^{pt}F(p)dp$ sur les segments de droite CD et EF.

Qu'obtient-on lorsque $\varepsilon \to 0$ et $R \to \infty$?

2.3) En utilisant le premier lemme de Jordan, montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} e^{pt}F(p)dp = 0.$$

3) En déduire $g(t) = TL^{-1}[G(p)]$ (on pourra faire un ou plusieurs changements de variables dans l'intégrale obtenue à la question précédente et on rappelle que $\int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Rappels

Fonction	TL
$f(t)$	$F(p)$
$(-1)^n t^n f(t)$	$\frac{d^n}{dp^n} F(p)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - ... - f^{(n-1)}(0^+)$
$\int_0^t f(u) du$	$\frac{F(p)}{p}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{\infty} F(p) dp$
$e^{at} f(t)$	$F(p-a)$
$f(t-a) U(t-a)$	$e^{-ap} F(p)$
$f\left(\frac{t}{k}\right)$	$kF(kp)$
$\int_0^t f(u) g(t-u) du$	$F(p) G(p)$

Fonction	TZ
$f(n)$	$F(z)$
$f(n-n_0)$	$z^{-n_0} F(z)$
$a^n f(n)$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$
$nf(n)$	$-z \frac{dF(z)}{dz}$
$f(n) * g(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) g(n-k)$	$F(z) G(z)$