Variables complexes

Transformée de Laplace – Transformée en Z

Nicolas Dobigeon

Université de Toulouse
IRIT/INP-ENSEEIHT

http://www.enseeiht.fr/~dobigeon
nicolas.dobigeon@enseeiht.fr

Plan du cours

Plan du cours

Le plan complexe

Le plan complexe est le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; u, v)$. La correspondance

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \mapsto & z = x + iy \end{array} \right.$$

est une bijection.
On confond le point $M\,(x, y)$ et son affixe $z = x + iy$.
Si $z \neq 0$, la représentation du nombre complexe z sous la forme module/argument s'écrit

$$z = \rho e^{i\theta}$$

où $\rho = |z| = OM$ est le module de z et $\theta = \arg z$ est une mesure en radians de l'angle $\left(u, \overrightarrow{OM}\right)$ définie modulo 2π c'est-à-dire à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$.

Fonction complexe de la variable z

A toute fonction f de la variable complexe :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z \; = x + iy & \mapsto & f(z) = P(x,y) + iQ(x,y) \end{array} \right.$$

on associe une fonction F :

$$F : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) \end{array} \right.$$

Plan du cours

Limites - continuité

$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|z\| = |z|$.
Soient f une fonction de la variable complexe et $z_0 = x_0 + iy_0$ et l deux nombres complexes.

Définition : limite

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = l \text{ ou } f(z) \underset{z \longrightarrow z_0}{\longrightarrow} l$$

signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad |z - z_0| < \eta \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$$

Définition : continuité

$$\begin{aligned} f \text{ continue en } z_0 \quad & \Longleftrightarrow \quad \lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \\ & \Longleftrightarrow \quad P(x, y) \text{ et } Q(x, y) \text{ continues en } (x_0, y_0) \end{aligned}$$

Limites - continuité

On admettra sans démonstration que les opérations sur les limites ou les fonctions continues sont identiques à celles obtenues pour des fonctions de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Attention !

Si $P(x, y)$ continue au point (x_0, y_0), alors

$$\begin{cases} x \mapsto P(x, y_0) & \text{est continue en} \quad x = x_0 \\ y \mapsto P(x_0, y) & \text{est continue en} \quad y = y_0 \end{cases}$$

Mais la réciproque est fausse !

Infini complexe

L'infini complexe noté ∞ est l'unique nombre complexe satisfaisant les propriétés suivantes avec $a \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \infty \times \infty &= \infty, |\infty| = \infty \\ \infty / a &= \infty, a/\infty = 0, a \times \infty = \infty \end{aligned}$$

- Représentation sur la sphère de Poincaré,
- Extensions des notions de limites au voisinage de l'infini.

Plan du cours

Fonctions algébriques

Fonctions	Définition	Continuité	T_{G} associée
$z \longmapsto z + a$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	Translation
$z \longmapsto a\ z$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	Similitude
$z \longmapsto \frac{1}{z}$	$\mathbb{C}^*$	$\mathbb{C}^*$	Inversion puis symétrie Ox
$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$	$\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$	$\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$	...

Plan du cours

Fonction exponentielle

Définition

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Propriétés

$$\begin{aligned} e^z\big|_{z=x} &= e^x \\ e^{z_1+z_2} &= e^{z_1} e^{z_2} \\ e^{x+iy} &= e^x \left(\cos y + i \sin y\right) \\ e^{-z} &= \frac{1}{e^z} \end{aligned}$$

On retrouve les mêmes relations fonctionnelles que dans $\mathbb{R}$.

Fonctions hyperboliques et trigonométriques

Fonctions hyperboliques

$$ch\ z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad sh\ z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad thz = \frac{shz}{chz}$$

Exemple : résolution de $ch\ z = 0$.

Fonctions trigonométriques

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

Exemple : résolution de $sin\ z = 2$.

Fonctions hyperboliques et trigonométriques

Propriétés

Fonctions	Ensemble de définition	Ensemble de Continuité
exp	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
ch	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
sh	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
th	$\mathbb{C}\setminus\left\{i\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right), k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{C}\setminus\left\{i\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right), k\in\mathbb{Z}\right\}$
cos	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
sin	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
tan	$\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

Formules de passage

$$\left\{\begin{array}{c} \cos iz = ch\ z \\ \sin iz = i\ sh\ z \\ \tan\ iz = i\ th\ z \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{c} ch\ iz = \cos z \\ sh\ iz = i \sin z \\ th\ iz = i\ \tan\ z \end{array}\right.$$

Plan du cours

Fonctions multiformes

A tout z de $\mathbb{C}$ correspond une seule valeur de e^z. Par contre à tout z de $\mathbb{C}^*$, correspond une infinité de valeurs de $\arg z$. Pour distinguer ces deux situations, on définit des fonctions dites **uniformes** ou **multiformes**

Définitions

- Une fonction f est appelée **uniforme** si à chaque valeur de z ne correspond qu'une seule valeur de $f(z)$.
- Une fonction f est appelée **multiforme** si à chaque valeur de z correspondent plusieurs valeurs de $f(z)$.

Fonctions multiformes

Exemples

- La fonction "argument d'un nombre complexe" :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \arg z \end{array}$$

  est une fonction multiforme.
- Les fonctions vues précédemment sont uniformes.

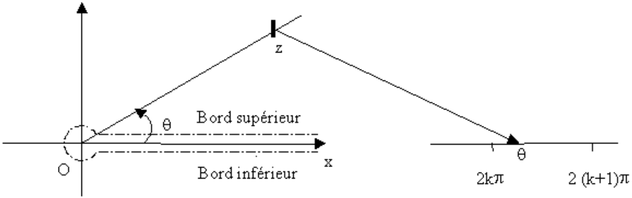
Etude des fonctions multiformes

Pour étudier les fonctions multiformes, on les "rendra uniformes" par la définition de leurs *déterminations de rang k*.

Fonction argument

La détermination de **rang k** de l'argument est

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash Ox^{+} & \longrightarrow &]2k\pi, 2(k+1)\pi[\\ z & \longmapsto & \theta = \arg_k z \end{array}$$



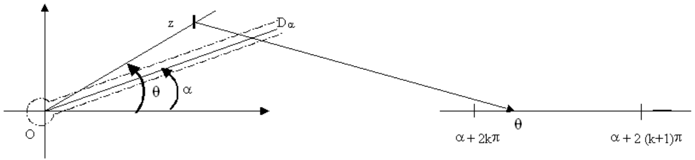
Remarques

- Le demi-axe Ox^{+} est appelé l'axe de coupure.
- Quand $k = 0$, on parle de "détermination principale".

Fonction argument : autre définition

La détermination de **rang k** de l'argument est

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}\backslash D_\alpha & \longrightarrow &]\alpha + 2k\pi, \alpha + 2(k+1)\pi[\\ z & \longmapsto & \theta = \arg_{k,\alpha} z \end{array}$$



Remarques

- Avec cette définition, la demi-droite D_α d'origine O et d'angle α est la **coupure**.

Fonctions multiformes

Définitions

- Valeurs de continuité : Valeurs sur les bords supérieur et inférieur de la coupure.
- Le point O origine de la coupure est appelé **point de branchement** ou **point de ramification**.

Remarques

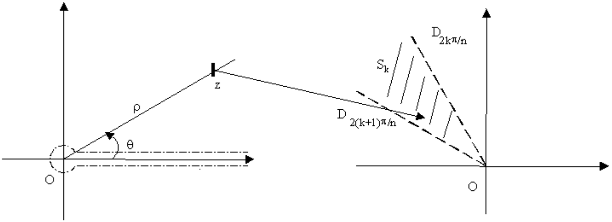
- Représentation de la coupure,
- Chemins fermés entourant le point de branchement $\rightarrow$ changement de détermination
- Chemins fermés n'entourant pas le point de branchement $\rightarrow$ pas de changement de détermination

Fonctions puissance

La détermination de **rang k** de $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$ est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{C} \setminus Ox^+ & \rightarrow & S_k \\ z & \mapsto & z_{(k)}^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \;\; e^{i\frac{1}{n}\arg_k(z)} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} \end{array} \right. \qquad \theta \in]0, 2\pi[$$

Cette correspondance est une bijection de $\mathbb{C} \setminus Ox^+$ dans le secteur ouvert S_k délimité par les deux droites $D_{\frac{2k\pi}{n}}$ et $D_{\frac{2(k+1)\pi}{n}}$ issues de O et faisant respectivement avec Ox^+ les angles $\frac{2k\pi}{n}$ et $\frac{2(k+1)\pi}{n}$.



Fonctions puissance

Extensions

- Fonction $z \mapsto (z-a)^{\frac{1}{n}}$.
- Fonction $z \mapsto (z-a)^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

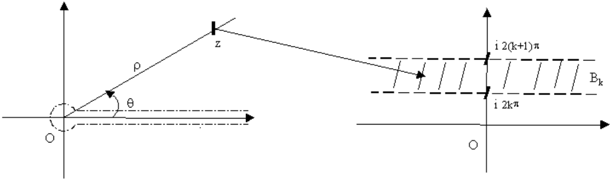
Exemple

Détermination de $z \mapsto (z+1)^{\frac{1}{2}}$.

Fonction logarithme

La détermination de **rang k** de $z \mapsto \log(z)$ est

$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathbb{C} \setminus Ox^+ & \to & B_k & \\ z = |z|e^{i\theta + i2k\pi} & \mapsto & \log_k(z) & = \ln|z| + \arg_k(z) \\ & & & = \ln\rho + i\theta + i2k\pi \end{array}\right.$$



Extension

- Fonction $z \mapsto z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$ définie par $z_k^\alpha = e^{\alpha \log_k(z)}$.

Plan du cours

Fonctions différentiable à 2 variables

Une fonction $P(x, y)$ est différentiable au point (x_0, y_0) lorsqu'elle est définie dans un ouvert contenant ce point et que :

$$\Delta P = A(x_0, y_0)\, h + B(x_0, y_0)\, k + \|(h, k)\|\, \varepsilon(h, k)$$

avec

$$\Delta P = P(x_0 + h, y_0 + k) - P(x_0, y_0)$$

et

$$\lim_{\|(h,k)\| \to 0} \varepsilon(h, k) = 0$$

Plan du cours

Définition de la dérivabilité

Définition

$f(z)$ dérivable en z_0 si et seulement si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. On note :

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Exemple 1

$f(z) = z$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1, \text{ donc } f \text{ est dérivable en } z_0.$$

Exemple 2

$f(z) = z^2$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0, \text{ donc } f \text{ est dérivable en } z_0.$$

Définition de la dérivabilité

Contre-exemple

$g(z) = \overline{z}$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} &= \frac{(x - x_0) - i\,(y - y_0)}{(x - x_0) + i\,(y - y_0)} \\ &= \frac{1 - i\,\frac{y - y_0}{x - x_0}}{1 + i\,\frac{y - y_0}{x - x_0}} = \frac{1 - im}{1 + im} \end{aligned}$$

qui dépend de la pente m du chemin donc :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} \text{ n'existe pas}$$

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable en z_0.

C.N.S. de dérivabilité

Propriété

Une fonction de la variable complexe f est dérivable au point $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si :

- $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont différentiables au point (x_0, y_0) et
- les conditions de Cauchy sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & = & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) & = & -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \end{array} \right.$$

Remarque

La démonstration de la C.N.S. de dérivabilité permet d'obtenir

$$\begin{array}{rcl} f\,'(z_0) & = & \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \\ f\,'(z_0) & = & \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) - i\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \end{array}$$

Plan du cours

Fonctions holomorphes

Définition

On appelle fonction holomorphe sur un ouvert A de $\mathbb{C}$ une fonction qui est dérivable en tout point de A. Notation : $f \in \mathcal{H}/A$.

Propriétés

Les propriétés sont identiques à celles des fonctions dérivables dans $\mathbb{R}$. Soient f et $g \in \mathcal{H}/A$.

- $\lambda f + \mu g \in \mathcal{H}/A$ et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f\,' + \mu g'$
- $fg \in \mathcal{H}/A$ et $(fg)' = f\,'g + fg'$
- Si $\forall z \in A, g(z) \neq 0$, alors :
$$\frac{1}{g} \in \mathcal{H}/A \text{ et } \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$
- Si $f \in \mathcal{H}/A$, $g \in \mathcal{H}/f(A)$, alors :
  $(g \circ f) \in \mathcal{H}/A$ et $(g \circ f)' = (g' \circ f)\, f\,'$
- Si f est bijective de A sur $f(A)$, alors :
$$f^{\,-1} \in \mathcal{H}/f(A) \text{ et } \left(f^{\,-1}\right)' = \frac{1}{f\,' \circ f^{-1}}$$

Dérivation des fonctions usuelles

Fonctions algébriques

On dérive formellement par rapport à z comme pour les fonctions de la variable réelle par rapport à x :

$$\begin{aligned} (az)' &= a \\ (z^m)' &= mz^{m-1}, \quad m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Fonctions définies par des séries

Théorème de dérivation des séries entières :

La fonction $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$ de rayon de convergence R est holomorphe sur le disque ouvert $d(O, R)$. Sa dérivée est la somme de la série dérivée terme à terme. Ainsi

$$\begin{aligned} (e^z)' &= e^z \\ (chz)' &= shz \\ (\cos z)' &= -\sin z \\ & \text{etc} \ldots \end{aligned}$$

On dérive par rapport à z comme on dérive dans R par rapport à x.

Dérivation des fonctions multiformes

- **Dérivée de** $\log_k z$

$$Z = \log_k(z) = \ln\rho + i\theta + 2ik\pi$$

définie de $\mathbb{C} \setminus Ox^+$ dans B_k.
On rappelle que $\exp(\log_k(z)) = z$. La dérivation par la formule de la fonction réciproque donne :

$$\begin{aligned} z &= f(Z) \Longrightarrow z' = f'(Z) \\ Z &= f^{-1}(z) \Longrightarrow Z' = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} z &= \exp(Z) \Longrightarrow z' = \exp(Z) \\ Z &= \log_k(z) \Longrightarrow Z' = \frac{1}{\exp(\log_k(z))} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

La constante additive disparaît. Ainsi :

$$\boxed{\log_k z \text{ holomorphe sur } \mathbb{C} \setminus Ox^+ \text{ et } (\log_k)'(z) = \tfrac{1}{z}}$$

Dérivation des fonctions multiformes

- **Dérivée de** $z_{(k)}^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{C}$

$$z_{(k)}^{\alpha} = \exp\left(\alpha \log_k(z)\right)$$

On obtient par dérivée des fonctions composées :

$$\left[z_{(k)}^{\alpha}\right]' = \left[\alpha \left[\log_k(z)\right]\right]' \exp\left[\alpha \log_k(z)\right]$$

Donc :

$$\left[z_{(k)}^{\alpha}\right]' = \frac{\alpha}{z} z_{(k)}^{\alpha}$$

La dérivée possède la même constante multiplicative (on retrouve la même uniformité). Ainsi

$$\boxed{z_{(k)}^{\alpha} \text{ holomorphe sur } \mathbb{C} \setminus Ox^{+} \text{ et } \left[z_{(k)}^{\alpha}\right]' = \tfrac{\alpha}{z} z_{(k)}^{\alpha}}$$

Plan du cours

Complément : fonctions harmoniques

Si on avait le temps...

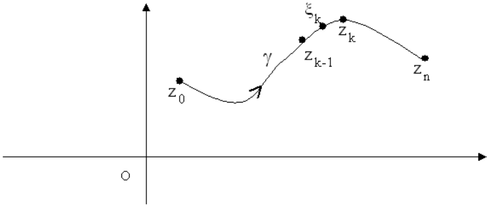
Plan du cours

Chemin

- Un **chemin** de $\mathbb{C}$ est une application continue $\gamma\ : [a, b] \to \mathbb{C}$, $[a, b]$ étant un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ s'appelle un **lacet**.
- γ est C^1 par morceaux si $\gamma'(t)$ existe et est continue sur les intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $[t_{j-1}, t_j]$ avec $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$.

Intégrale curviligne complexe

Soit $f(z)$ définie sur un chemin C^1 par morceaux γ



Soit la subdivision $\bigcup\limits_{k=1}^{n} \widehat{z_{k-1}z_k}$ de ce chemin avec $\xi_k \in \widehat{z_{k-1}z_k}$,
$z_k = \gamma(t_k)$, $z_0 = \gamma(a)$ et $z_n = \gamma(b)$.

Définition :

$$\boxed{\begin{array}{c}\int_\gamma f(z)dz = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) \\ \text{avec } \max\limits_k |z_k - z_{k-1}| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0\end{array}}$$

Intégrale curviligne complexe

Avec les notations suivantes

$$\begin{aligned} z_k &= x_k + iy_k \\ z_k - z_{k-1} &= \Delta x_k + i\Delta y_k \\ \xi_k &= a_k + ib_k \\ f(\xi_k) &= P(a_k, b_k) + iQ(a_k, b_k) \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(a_k, b_k)\Delta x_k - Q(a_k, b_k)\Delta y_k \\ +i \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} Q(a_k, b_k)\Delta x_k + P(a_k, b_k)\Delta y_k \end{aligned}$$

avec $\max_k |\Delta x_k| \to 0$ et $\max_k |\Delta y_k| \to 0$. D'où

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (Pdx - Qdy) + i\int_\gamma (Qdx + Pdy)$$

Intégrale curviligne complexe

Conditions suffisantes d'existence

$$\boxed{\begin{array}{c} P \text{ et } Q \text{ continues sur } \gamma \\ \text{ou } f \text{ continue sur } \gamma \end{array}}$$

Calcul pratique : γ paramétré

$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt}$$

Chemins usuels

- Segment de droite parallèle à l'axe des abscisses,
  $z = x + iy_0,\ x \in [x_1, x_2]$
- Segment de droite parallèle à l'axe des ordonnées,
  $z = x_0 + iy,\ y \in [y_1, y_2]$
- Arc de cercle de rayon R_0
  $z = R_0 e^{i\theta},\ \theta \in [\theta_1, \theta_2]$
- Segment de droite passant par l'origine
  $z = \rho e^{i\theta_0},\ \rho \in [\rho_1, \rho_2]$

Intégrale curviligne complexe

Propriétés élémentaires de l'intégrale

a) Linéarité

$$\int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz + \mu \int_\gamma g(z)dz$$

b) Sens de parcours du chemin γ

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_{\gamma^+} f(z)dz$$

$\gamma^- = \gamma^+$ parcouru en sens inverse.

c) Intégrale d'une constante $f(z) = K$

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k - z_{k-1}) = K(z_n - z_0) = K(\gamma(b) - \gamma(a))$$

Plan du cours

Lemmes de Jordan

1er lemme de Jordan

Hypothèses

$C_r(a, r)$ arc de cercle de centre a et de rayon r

$\lim_{r \to 0(\text{ resp. } \infty)} \sup_{C_r} |(z-a) f(z)| = 0$

Conclusion

$$\boxed{\lim_{r \to 0(\text{ resp. } \infty)} \int_{C_r} f(z) dz = 0}$$

Preuve

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(a + re^{i\theta}) rie^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leqslant \int_{\alpha}^{\beta} \left| rf(a + re^{i\theta}) \right| d\theta \\ &\leqslant (\beta - \alpha) \sup_{C_r} |(z-a) f(z)| \end{aligned}$$

Lemmes de Jordan

2ième lemmes de Jordan

Hypothèse

$\lim_\infty \sup_{C_r} |f(z)| = 0$

Conclusions

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lim_\infty \int_{C_r} e^{imz} f(z)dz = 0 & \text{pour } m > 0 \text{ et } C_r = C_r^+ \\ \lim_\infty \int_{C_r} e^{imz} f(z)dz = 0 & \text{pour } m < 0 \text{ et } C_r = C_r^- \\ \lim_\infty \int_{C_r} e^{mz} f(z)dz = 0 & \text{pour } m < 0 \text{ et } C_r = C_r^d \\ \lim_\infty \int_{C_r} e^{mz} f(z)dz = 0 & \text{pour } m > 0 \text{ et } C_r = C_r^g \end{array}}$$

Preuve :

$$\begin{array}{rcl} |I_r| & = & \left| \int_{C_r} e^{imz} f(z)dz \right| = \left| \int_0^\pi e^{imre^{i\theta}} f(re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta \right| \\ & \leq & 2r \sup_{C_r} |f(z)| \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mr\sin\theta} d\theta \\ & \leq & \sup_{C_r} |f(z)| \frac{\pi}{m}(1 - e^{-mr}) \ (\text{car } \sin\theta \geqslant \frac{2\theta}{\pi}) \end{array}$$

Plan du cours

Théorème de Cauchy
Domaine 1 connexe (ou simplement connexe)

Hypothèses

f holomorphe sur Ω ouvert non vide de $\mathbb{C}$

Soit $D \subset \Omega$ un domaine simplement connexe de contour C

Conclusion

$$\boxed{\int_C f(z)dz = 0}$$

Preuve : utiliser la formule de Green Riemann

$$\int_{C^+} Adx + Bdy = \int\int_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dxdy$$

Théorème de Cauchy
Domaine n connexe - Généralisation

Exemple d'un domaine 2 connexe

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1^+} f(z)dz + \int_{C_2^-} f(z)dz = 0$$

Frontière orientée
$\overrightarrow{\tau}$ vecteur tangent
$\overrightarrow{n}$ normale intérieure orientée

$$(\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{n}) = +\frac{\pi}{2}$$

Pour $\delta D = C_1^+ \cup C_2^-$, on a

$$\int_{\delta D} f(z)dz = 0$$

Théorème de Cauchy
Application

Soit f holomorphe sur un domaine simplement connexe D.

a) Définition de $\int_a^b f(z)dz$

Soient deux points a et b de D

Soient γ_1, γ_2 deux chemins inclus dans D d'origine a et d'extrémité b. Alors

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_a^b f(z)dz$$

b) Définition de $F_{z_0}(u) = \int_{z_0}^u f(z)dz,\ u \in \mathbb{C}$

$F_{z_0}(u)$ est indépendante du chemin joignant z_0 et u inclu dans D

$F_{z_0}(u)$ est une primitive de $f(z)$ telle que $F'_{z_0}(u) = f(u)$

Plan du cours

Théorème des résidus

Hypothèses

f holomorphe sur $\Omega \backslash \underset{j}{\cup} z_j$, Ω ouvert non vide de $\mathbb{C}$

z_j points singuliers isolés de f

$D \subset \Omega$ domaine simplement connexe de contour ∂D inclus dans Ω

Conclusion

$$\boxed{\int_{\partial D^+} f(z)dz = 2i\pi \sum_{z_j \in D} \mathrm{res} f(z_j)}$$

avec (définition de $\mathrm{res} f(z_j)$) :

$$\boxed{\mathrm{res} f(z_j) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+(z_j,r)} f(z)dz}$$

Remarques et définition

- **Point singulier isolé (psi)**
  z_j est un psi de $f(z)$ si et seulement si $\exists r > 0$ tel que f est holomorphe sur $d(z_j, r)\setminus\{z_j\}$, $d(z_j, r)$ désignant le disque de centre z_i et de rayon r_i.
- **Calcul du résidu à l'aide du développement de Laurent**
  Si z_j est un psi, on admet que f possède un développement dit développement de Laurent dans $d(z_j, r)\setminus\{z_j\}$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_j)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_j)^n$$

On en déduit alors :

$$\int_{C^+(z_j,r)} f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{C^+} \frac{b_n}{(z - z_j)^n} dz + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C^+} a_n (z - z_j)^n dz$$

Remarques et définition

On pose $z - z_j = re^{i\theta}$ et on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{b_n i d\theta}{r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}} + i \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} a_n r^{n+1} e^{i(n+1)\theta} d\theta$$

Toutes les intégrales sont nulles (vérification facile) sauf :

$$\int_0^{2\pi} \frac{b_n i d\theta}{r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}} \quad \text{avec} \quad n = 1$$

Donc :

$$\int_{C^+(z_j, r)} f(z) dz = \int_0^{2\pi} b_1 i d\theta = 2i\pi b_1$$

Conclusion : res$f(z_j)$ est le coefficient du terme en $\frac{1}{z-z_j}$ de la partie principale du dévt de Laurent de f .

Remarques et définition

- **Calcul des résidus pour un pôle d'ordre p**
  On effectue le développement de Taylor de $\varphi(z) = (z - z_j)^p f(z)$ qui est holomorphe sur $V(z_j)$

$$\varphi(z) = \varphi(z_j) + \ldots + \frac{(z - z_j)^{p-1}}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}_{(z_j)} + \ldots$$

  d'où le développement de Laurent de f :

$$f(z) = \frac{\varphi(z_j)}{(z - z_j)^p} + \ldots + \frac{\varphi^{(p-1)}_{(z_j)}}{(p-1)!(z - z_j)} + \ldots$$

  donc

$$\boxed{\mathrm{res} f(z_j) = \frac{1}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}_{(z_j)} = \frac{1}{(p-1)!}\;\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\left[(z - z_j)^p f(z)\right]\Big|_{z=z_j}}$$

En pratique :

- pour $p > 2$, on effectue le développement de Laurent,
- pour $p = 2$, on peut utiliser $\mathrm{res} f(z_j) = \frac{d}{dz}(z - z_j)^2 f(z)\Big|_{z=z_j}$,
- pour $p = 1$, on a $\mathrm{res} f(z_j) = \lim\limits_{z \to z_j}(z - z_j) f(z)$

Remarques et définition

Cas particulier intéressant : z_j pôle d'ordre 1, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z_j) \neq 0$
On développe $Q(z)$:

$$Q(z) = 0 + (z - z_j)Q'(z_j) + \frac{(z - z_j)^2}{2!}Q''(z_j) + \ldots$$

donc

$$\boxed{\lim_{z \to z_j}(z - z_j)f(z) = \frac{P(z_j)}{Q'(z_j)}}$$

Cette formule est intéressante pour certains calculs de résidus comme celui de $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ en $z = 0$. En effet :

$$\mathrm{res}f\,(0) = \frac{P(0)}{Q'(0)} = \frac{1}{\cos 0} = 1$$

Plan du cours

Intégrales du type I : $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

Le plus souvent, on prend $f(z)$ et le contour est constitué d'une partie rectiligne qui donne I et de parties circulaires qui ferment le contour.
Exemple **:** Calculer

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$$

Intégrales contenant une fonction multiforme

Exemple : montrer que pour $a \in \,]0,1[$

$$J = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

Intégrales trigonométriques

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$$

où R est une fraction rationnelle. On pose $z = e^{i\theta}$ et on exprime $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de z.
On se ramène alors au calcul d'une intégrale sur le cercle unité.
Exemple **:** montrer que

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3\sin\theta} = \frac{\pi}{2}$$

Plan du cours

Application à la sommation de séries

Voir TD.

Plan du cours

Définition

Ensemble des fonctions transformables

E est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}^+$ telles que

- f est localement intégrable i.e. $\int_0^A f(t)dt < \infty, \forall A$
- Il existe x_0 tel que $\int_0^\infty e^{-x_0 t} f(t)dt < \infty$

Transformée de Laplace

Pour $f \in E$, on définit sa transformée de laplace

$$\boxed{F(p) \triangleq \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt \qquad p \in \mathbb{C}}$$

Notation : $F(p) = TL(f(t))$

Définition
Convergences

Convergence simple

Théorème 1
Si $F(p)$ existe pour $p = p_0 = x_0 + iy_0$ alors
$F(p)$ existe $\forall p$ tel que$\mathrm{Re}p > \mathrm{Re}p_0 = x_0$

Conséquence : $\{x \in \mathbb{R}, F(p) < \infty\}$ admet une borne inférieure notée x_c appelée abscisse de convergence simple de F.

Convergence absolue

Théorème 2
Si $\int_0^\infty \left|e^{-pt} f(t)\right| \, dt$ existe pour $p = p_0 = x_0 + iy_0$ alors
$\int_0^\infty \left|e^{-pt} f(t)\right| \, dt$ existe $\forall p$ tel que$\mathrm{Re}p > \mathrm{Re}p_0 = x_0$

Conséquence : $\left\{x \in \mathbb{R}, \int_0^\infty \left|e^{-pt} f(t)\right| \, dt < \infty\right\}$ admet une borne inférieure notée x_{ca} appelée abscisse de convergence absolue de F (on a bien sur $x_c \leq x_{ca}$)

Exemple : $f(t) = e^{kt} \sin\left[e^{kt}\right]$, $k > 0$, $x_c = 0$ et $x_{ca} = k$.
Remarque : en pratique, on a le plus souvent $x_c = x_{ca}$

Définition

Théorème fondamental

Si $f(t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$,
alors $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$ est holomorphe sur $]x_c, +\infty[$ et donc indéfiniment dérivable sur $]x_c, +\infty[$ avec

$$\frac{d^n F(p)}{dp^n} = \int_0^\infty \frac{d^n}{dp^n} \left[e^{-pt} f(t)\right] dt$$

Conséquence : obtention de x_c à partir de $F(p)$

Si $F(p)$ fonction de la variable complexe p est la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ qui admet dans $\mathbb{C}$ des psi s_k et des points de ramification r_j, alors $x_c = \sup \mathrm{Re}(s_k, r_j)$

Exemples : $F(p) = \frac{1}{p(p-2)}$ $\quad x_c = 2$

$F(p) = \frac{1}{p+1}$ $\quad x_c = 0$

Plan du cours

Propriétés usuelles

a) Linéarité

$$TL\,(\lambda f + \mu g) = \lambda F(p) + \mu G(p)$$

En général, $x_c = \sup(x_{c_f}, x_{c_g})$.

b) Dérivation

*** par rapport à p**

$$TL\,\{(-1)^n t^n f(t)\} = \frac{d^n}{dp^n} F(p)$$

*** par rapport à t** (f continue sur $[0, +\infty[$)

$$TL\,[f'(t)] = pF(p) - f(0^+)$$

Généralisation

$$TL\left[f^{(n)}(t)\right] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+)$$

Application : résolution d'équations différentielles linéaires

Propriétés usuelles

c) Intégration
*** TL d'une primitive**

$$TL\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(p)}{p}$$

Abscisse de convergence : $\sup(x_c, 0)$
*** Primitive d'une TL**

$$TL\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^{\infty} F(s)ds$$

Propriétés usuelles

d) Translation

*** par rapport à p**

$$TL\left[e^{at}f(t)\right] = F(p-a)$$

Abscisse de convergence : $x_c + \mathrm{Re}(a)$.

*** par rapport à t**

$$TL\left[f(t-a)U(t-a)\right] = e^{-ap}F(p)$$

Abscisse de convergence : x_c

Remarque : Application aux fonctions périodiques.

e) Similitude

$$TL\left[f\left(\frac{t}{k}\right)\right] = kF(kp) \qquad k > 0$$

Abscisse de convergence : $\frac{x_c}{k}$

Propriétés usuelles

f) Convolution

$$TL\left[\int_0^t f(u)g(t-u)du\right] = F(p)G(p)$$

g) Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$$

h) Transformée des séries

Séries de terme général $a_n \frac{t^n}{n!}$
de rayon de convergence $R_c = \infty$

$$TL\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}}$$

Exemple : Montrer que $TL\left[\frac{\sin \omega t}{t}\right] = Arctg \frac{\omega}{p}$

Utiliser deux méthodes : Dévt en série et $TL\left[\frac{x(t)}{t}\right]$

Quelques transformées de Laplace

Fonction	TL	Convergence
$U(t)$	$\frac{1}{p}$	$x_c = 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	$x_c = \mathrm{Re}\alpha$
$e^{i\omega t}$	$\frac{1}{p-i\omega}$	$x_c = 0$
$ch\,(\alpha t)$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$x_c = \sup \mathrm{Re}(\alpha, -\alpha)$
$sh\,(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$x_c = \sup \mathrm{Re}(\alpha, -\alpha)$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$x_c = 0$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$x_c = 0$
t	$\frac{1}{p}$	$x_c = 0$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$x_c = 0$
$t^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	

avec $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ et $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$

Plan du cours

Formule d'inversion

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt}dt = \int_0^{\infty} x(t)e^{-at}e^{-j2\pi ft}dt$$

avec $p = a + j2\pi f$.

Analogie avec la transformée de Fourier

$$\begin{gathered} X(f) = TF(x(t)) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-j2\pi ft} \\ x(t) = TF^{-1}(X(f)) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{+j2\pi ft}df \end{gathered}$$

Donc :

$$X(p) = TF\left[x(t)e^{-at}U(t)\right]$$

d'où la formule d'inversion :

$$\boxed{x(t)U(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{D\uparrow} X(p)e^{pt}dp}$$

On applique alors le théorème des résidus à $X(p)e^{pt}$
Exemple : $X(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$

Plan du cours

Equations différentielles à coefficients constants

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y(t) = f(t)$$

Conditions initiales

$$y(0) = b_0, y'(0) = b_1, ..., y^{(n-1)}(0) = b^{(n-1)}$$

Transformation par Laplace

$$\begin{gathered} TL\left[a_n y(t)\right] = a_n Y(p) \\ TL\left[y^{(n)}(t)\right] = p^n Y(p) - p^{n-1} y(0^+) - ... - y^{(n-1)}(0^+) \\ TL\left[\Omega_n(y)\right] = \Omega_n(p) Y(p) - Q_{n-1}(p) \\ TL\left[f(t)\right] = F(p) \end{gathered}$$

Problème algébrique

$$\Omega_n(p) Y(p) = Q_{n-1}(p) + F(p)$$

$$Y(p) = \frac{Q_{n-1}(p)}{\Omega_n(p)} + \frac{F(p)}{\Omega_n(p)} = Y_1(p) + Y_2(p)$$

Equations différentielles à coefficients constants

a) $Y_1(p)$ **fraction rationnelle**

$$Y_1(p) = \frac{Q_{n-1}(p)}{\prod_{i=1}^{r}(p-p_i)^{k_i}}$$

où p_i est une racine d'ordre k_i avec $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$
Décomposition en éléments simples :

$$Y_1(p) = \sum_{i=1}^{r} \left\{ \frac{A_{i1}}{p-p_i} + \frac{A_{i2}}{(p-p_i)^2} + \ldots + \frac{A_{ik_i}}{(p-p_i)^{k_i}} \right\}$$

d'où

$$y_1(t) = \sum_{i=1}^{r} e^{p_i t} \left[A_{i1} + A_{i2} t + \ldots + A_{ik_i} t^{k_i - 1} \right]$$

b) $Y_2(p) = \frac{F(p)}{\Omega_n(p)} = F(p) \times \frac{1}{\Omega_n(p)}$
donc :

$$y_2(t) = \int_0^t f(u) R_n(t-u) du$$

La solution du problème est alors $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$

EDP à plusieurs variables

La TL permet de **réduire l'équation d'une dimension.**
Exemple :
Problème à 2 dimensions spatio-temporel corde vibrante $f(x,t)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Conditions initiales

$$f(x,0) = \varphi(x)$$
$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$$

Conditions aux limites

$$f(\infty,t) = 0$$
$$f(0,t) = g(t)$$

EDP à plusieurs variables

Solution à l'aide de la TL (par exemple, p est un considéré comme un paramètre)

$$F(x,p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(x,t) dt$$

$$\begin{aligned} TL\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right] &= pF(x,p) - f(x,0) \\ &= pF(x,p) - \varphi(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TL\left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)\right] &= p^2 F(x,p) - pf(x,0) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) \\ &= p^2 F(x,p) - p\varphi(x) - \psi(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TL\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right] &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} dt \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(x,t) dt = \frac{d^2 F(x,p)}{dx^2} \end{aligned}$$

EDP à plusieurs variables

On obtient alors :

$$\frac{d^2F(x,p)}{dx^2} - p^2F(x,p) = p\varphi(x) + \psi(x)$$

avec

$$\begin{aligned} F(\infty, p) &= TL\,[f(\infty, t)] = 0 \\ G(p) &= TL\,[g(t)] = TL[f(0,t)] = F(0,p) \end{aligned}$$

Problème à une dimension (équation différentielle + conditions limites).

Plan du cours

Définition

Définition

On définit la transformée en Z d'une suite $x(n), n \in \mathbb{Z}$ par :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \qquad z \in \mathbb{C}$$

Notation :

$$X(z) = TZ(x(n))$$

Vocabulaire : TZ bilatérale et TZ unilatérale

Définition

Domaine de convergence

La région de convergence est l'ensemble des nombres complexes z tels que la série $X(z)$ converge.

Rappel : critère de Cauchy

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ converge}$$

On a une condition suffisante de convergence. A l'aide de ce critère, on montre que la série $X(z)$ converge dès que :

$$0 \leq R_x^- < |z| < R_x^+ \leq +\infty$$

Exemple : $X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n}$ converge pour $|z| > 1$

Plan du cours

Propriétés usuelles

Linéarité

$$TZ(ax(n) + by(n)) = aX(z) + bY(z)$$

Convergence : si $R^+ = \min(R_x^+, R_y^+)$ et $R^- = \max(R_x^-, R_y^-)$, alors le domaine de convergence contient $]R^-, R^+[$.

Décalage

$$TZ(x(n - n_0)) = z^{-n_0} X(z)$$

Même domaine de convergence que pour $X(z)$

Changement d'échelle

$$TZ(a^n x(n)) = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Domaine de convergence : $|a|\, R_x^- < |z| < |a|\, R_x^+$

Propriétés usuelles

Dérivabilité

La transformée en Z définit une série de Laurent qui est indéfiniment dérivable terme à terme dans son domaine de convergence.

On en déduit :

$$TZ(nx(n)) = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

Même domaine de convergence que pour $X(z)$

Produit de convolution

Le produit de convolution entre les suites $x(n)$ et $y(n)$ est défini par :

$$u(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k)$$

On a alors

$$TZ(x(n) * y(n)) = X(z)Y(z)$$

La région de convergence de $U(z)$ peut être plus large que l'intersection des régions de convergence de $X(z)$ et de $Y(z)$.

Plan du cours

TZ inverse

La transformée en Z inverse est définie par :

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi} \int_{C^+} X(z) z^{n-1} dz$$

où C est un contour fermé inclu dans l'anneau de convergence

TZ inverse

Preuve

L'expression de la transformée en Z inverse découle directement du calcul de l'intégrale

$$J(n,k) = \int_{C^+} z^{n-k-1} dz$$

A l'aide du théorème des résidus, on montre :

$$J(n,k) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq k \\ j2\pi \text{ si } n = k \end{cases}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{j2\pi} \int_{C^+} X(z) z^{n-1} dz &= \frac{1}{j2\pi} \int_{C^+} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} \right) z^{n-1} dz \\
&= \frac{1}{j2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) J(n,k) \\
&= x(n)
\end{aligned}$$

Remarque : existence de tables

Plan du cours

Filtrage des signaux à temps discrets

Voir cours de traitement numérique du signal.

Application aux équations récurrentes

Etude d'un exemple : système linéaire du premier ordre

$$y(n) - ay(n-1) = x(n) \qquad |a| < 1$$

L'entrée de ce système est définie par :

$$x(n) = b^n U(n) \text{ avec } |b| < 1$$

où $U(n)$ est l'échelon de Heaviside.

- Déterminer $y(n)$ pour $n \geq 0$ sachant que $y(n) = 0$ pour $n < 0$.
- Déterminer la réponse impulsionnelle du système $h(n)$ telle que $y(n) = x(n) * h(n)$.

Plan du cours

Transformées en Z et de Laplace

Soit $x(t)$ un signal causal dont la transformée de Laplace est :

$$X(p) = \int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt$$

On échantillonne ce signal à la période T et on note $X(z)$ sa transformée en Z :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$

Alors

$$\boxed{X(z) = \sum res \frac{X(p)}{1-e^{pT}z^{-1}}}$$

Transformées en Z et de Laplace

La formule inverse de la transformée de Laplace donne

$$x(t)U(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{D\uparrow} X(p)e^{pt}dp$$

d'où

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2i\pi}\int_{D\uparrow} X(p)e^{pnT}dp\right]z^{-n} \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{D\uparrow} X(p)\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^{-1}e^{pT}\right)^n dp \end{aligned}$$

Dans la mesure où $\left|z^{-1}e^{pT}\right| < 1$, on a

$$X(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{D\uparrow} X(p)\frac{1}{1-z^{-1}e^{pT}}dp = \sum res\frac{X(p)}{1-e^{pT}z^{-1}}$$

Variables complexes

Transformée de Laplace – Transformée en Z

Nicolas Dobigeon

Université de Toulouse
IRIT/INP-ENSEEIHT

http://www.enseeiht.fr/~dobigeon
nicolas.dobigeon@enseeiht.fr