

TPs de traitement numérique du signal TR1

TP1 : Corrélation et spectre

TP2 : Filtrage Numérique

2006-2007

Table des matières

1	TP 1 : Corrélation et Spectre	5
1.1	Rappels	5
1.1.1	Estimation des fonctions de corrélation	5
1.1.2	Détection d'un signal périodique noyé dans un bruit	8
1.1.3	Identification d'un filtre	8
1.1.4	Estimation de la densité spectrale de puissance	9
1.1.5	Annexe	9
1.2	Travail à effectuer	11
1.2.1	Autocorrélations	11
1.2.2	Estimations spectrales	11
1.3	Programmation Matlab	13
1.3.1	Quelques fonctions Matlab utiles dans le TP	13
1.3.2	Autocorrélations	13
1.3.3	Estimations spectrales	13
2	TP 2 : Filtrage Numérique	15
2.1	Rappels	15
2.1.1	Filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)	15
2.1.2	Filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)	17
2.2	Travail à effectuer	18
2.2.1	Introduction	18
2.2.2	Gabarit	18
2.2.3	Filtres à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)	19
2.2.4	Filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)	20
2.2.5	Conclusion	21

Chapitre 1

TP 1 : Corrélation et Spectre

Le but de ce TP est d'analyser des estimateurs de la fonction de corrélation et de la densité spectrale de puissance (DSP). La fonction de corrélation constitue grossièrement une mesure de ressemblance entre deux signaux. Cette quantité dépend d'un paramètre de décalage temporel (déphasage entre les deux signaux) et possède selon la nature des signaux, plusieurs définitions.

La densité spectrale de puissance (= transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation) reflète la contribution qu'apporte chaque fréquence à la puissance moyenne du signal.

1.1 Rappels

1.1.1 Estimation des fonctions de corrélation

Dans le cadre d'une étude neurologique, considérons le signal $x(t)$ correspondant aux phases du sommeil d'un patient au cours de la nuit. Considérons également l'électroencéphalogramme $y(t)$ de ce même patient. La question que l'on est amené à se poser est de savoir s'il existe une relation entre le processus physique P_x qui donne naissance aux fonctions $x(t)$ et le processus physique P_y qui donne naissance aux fonctions $y(t)$. La première réponse à cette question se situe dans la fonction d'autocorrélation.

La fonction de corrélation se définit de différentes façons suivant la classe de signaux à laquelle on s'adresse :

Signaux déterministes

- Energie finie

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t - \tau)dt$$

- Puissance finie

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y^*(t-\tau)dt$$

Cas particulier des signaux périodiques :

$$C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y^*(t-\tau)dt$$

Signaux aléatoires

$$C_{xy}(\tau) = E[x(t)y^*(t-\tau)]$$

Lorsque $y = x$ on parle de fonction d'**autocorrélation** ($C_{xx}(\tau) = C_x(\tau)$).

Propriétés de la fonction d'autocorrélation

parité : $C_x(-\tau) = C_x(\tau)$

maximum en zéro : $|C_x(\tau)| \leq C_x(0)$

puissance moyenne du signal = $C_x(0)$

Propriétés de la fonction d'intercorrélation

symétrie hermitienne : $C_{xy}^*(-\tau) = C_{xy}(\tau)$

majoration : $|C_{xy}(\tau)| \leq \frac{1}{2}(C_x(0) + C_y(0))$

Algorithmes de calcul

Pour estimer ces fonctions de corrélation on dispose d'algorithmes de calculs temporels et fréquentiels via la transformée de Fourier discrète.

Dans le calcul temporel, $C_{xy}(k)$ est estimé par la valeur moyenne de $x(n)y(n+k)$ (l'intégrale est estimée par une somme temporelle). Si on dispose que de N échantillons des signaux $x(n)$ et $y(n)$ (réels), $C_{xy}(k)$ ne peut être estimé qu'à partir de $N - k$ valeurs :

$$\hat{C}_{xy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-k-1} x(n)y(n+k) \quad 0 \leq k \leq N-1$$

Lorsque k tend vers $N - 1$ peu de termes interviennent dans le calcul de la moyenne alors que le terme de normalisation reste égal à $\frac{1}{N}$. Cela a pour conséquences d'introduire un **biais** dans l'estimation : la corrélation est pondérée par une fenêtre **triangulaire**.

Pour éliminer ce biais, un second estimateur peut être défini de la façon suivante :

$$\hat{C}_{xy}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k-1} x(n)y(n+k) \quad 0 \leq k \leq N-1$$

On remarque que pour les valeurs k proches de N , la variance de l'estimateur non biaisé augmente considérablement, ce qui n'était pas le cas pour l'estimateur non biaisé.

Rappelons que le choix d'un estimateur résulte d'un compromis biais/variance.

Le calcul temporel requiert de très nombreuses opérations, de l'ordre de $\frac{N^2}{2}$ multiplications et additions, et il est préférable de mettre en oeuvre les estimateurs basés sur un calcul fréquentiel.

Le calcul par transformée de Fourier est basé sur le fait que le calcul d'une fonction de corrélation s'apparente à une opération de convolution :

$$C_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau)$$

Or une convolution temporelle (notée $*$) est, dans le plan fréquentiel, transformée en une simple multiplication :

$$\begin{aligned} \text{Estimateur biaisé :} \quad & \widehat{C}_{xy}(k) = \frac{1}{N} FFT^{-1}(X(n)Y^*(n)) \\ \text{Estimateur non biaisé :} \quad & \widehat{C}_{xy}(k) = \frac{1}{N-k} FFT^{-1}(X(n)Y^*(n)) \end{aligned}$$

où $X(n) = FFT(x(k))$ et $Y(n) = FFT(y(k))$ avec $n = 0, \dots, N_f$ où N_f représente le nombre de points calculés en fréquence. Si les signaux $x(k)$ et $y(k)$ sont constitués de N points, N_f représente alors le nombre de points obtenus après Zero Padding (pour meilleure visualisation du spectre) et doit être une puissance de 2 (pour utilisation de l'algorithme de calcul rapide de la transformée de Fourier numérique : FFT).

L'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT) permet d'obtenir un nombre d'opérations multiplications/additions de l'ordre de $3N_f \log_2(N_f) + N_f$, ce qui rend le calcul fréquentiel plus rapide que le calcul temporel.

Remarque : détail du calcul

Soient $x(k)$ et $y(k)$ de même durée N . On les prolonge de M échantillons nuls ($N + M$ étant une puissance de 2). On évalue les deux Transformées de Fourier Discrètes (TFD) sur $N + M$ points pour obtenir $X(n)$ et $Y(n)$. L'intercorrélation est alors donnée par :

$$\widehat{C}_{xy}(k) = \frac{1}{N} \frac{1}{N+M} \sum_{n=0}^{N+M-1} X^*(n) Y(n) e^{\frac{j2\pi nk}{N+M}} \quad k = 0, \dots, N+M-1$$

estimateur biaisé

ou

$$\widehat{C}_{xy}(k) = \frac{1}{N-k} \frac{1}{N+M} \sum_{n=0}^{N+M-1} X^*(n) Y(n) e^{\frac{j2\pi nk}{N+M}} \quad k = 0, \dots, N+M-1$$

estimateur biaisé

1.1.2 Détection d'un signal périodique noyé dans un bruit

Par détection, on entend détection de présence. Il ne s'agit pas de retrouver la forme du signal périodique mais de détecter sa présence, de savoir si ce signal existe ou non.

Soit $x(n)$ le signal périodique de période inconnue noyé dans un bruit centré $b(n)$:

$$y(n) = x(n) + b(n)$$

La fonction d'autocorrélation du signal $y(n)$ s'écrit :

$$C_{yy}(k) = C_{xx}(k) + C_{xb}(k) + C_{bx}(k) + C_{bb}(k)$$

Si le bruit $b(n)$ est indépendant du signal $x(n)$, les intercorrélations $C_{xb}(k)$ et $C_{bx}(k)$ sont nulles pour tout k . Si de plus la densité spectrale du bruit est absolument continue, on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} C_{bb}(k) = 0$$

D'où,

$$C_{yy}(k) \rightarrow C_{xx}(k) \text{ lorsque } k \rightarrow +\infty$$

En calculant la fonction d'autocorrélation de $y(n)$, on va voir apparaître celle du signal périodique $x(n)$ aux grandes valeurs de k .

1.1.3 Identification d'un filtre

Considérons un filtre ou d'une façon plus générale un système linéaire invariant dans le temps, de réponse temporelle $h(k)$ et de réponse fréquentielle $H(n)$ (fonction de transfert). La relation temporelle qui relie la sortie $y(k)$ à l'entrée $x(k)$ est la suivante :

$$y(k) = x(k) * h(k)$$

On obtient la même relation sur les fonctions de corrélation :

$$C_{yx}(k) = C_{xx}(k) * h(k)$$

où $C_{yx}(k)$ est l'intercorrélacion entre la sortie et l'entrée du filtre.

Si le signal $x(k)$ est un bruit blanc, c'est-à-dire $C_{xx}(k) = \delta(k)$, on a :

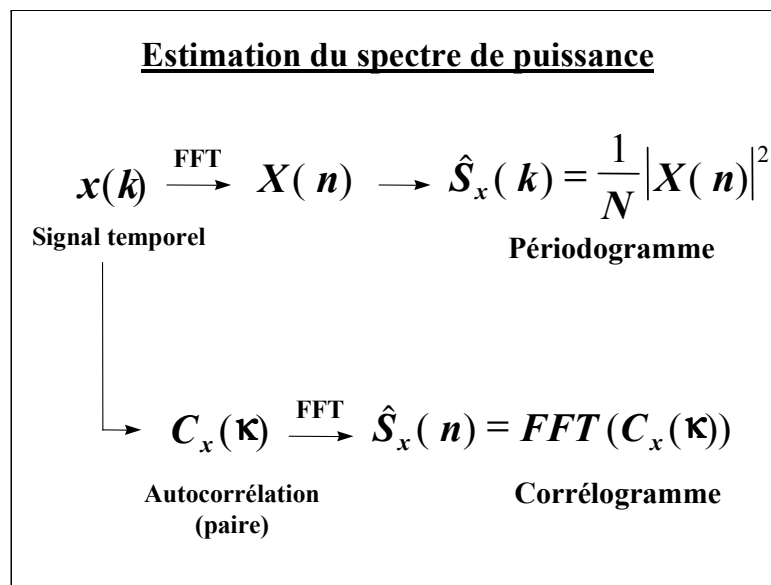
$$C_{yx}(k) = \delta(k) * h(k) = h(k)$$

L'intercorrélacion entre la sortie et l'entrée du filtre correspond à la réponse impulsionnelle du filtre. La transformée de Fourier de l'intercorrélacion permet d'obtenir la réponse fréquentielle.

1.1.4 Estimation de la densité spectrale de puissance

Il existe 2 techniques classiques d'estimation du spectre :

- le PERIODOGRAMME
- le CORRELOGRAMME



Ces deux méthodes mettent en oeuvre la transformée de Fourier discrète définie par :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-\frac{j2\pi nk}{N}}, n = 0, \dots, N_f - 1$$

1.1.5 Annexe

Corrélations théoriques de signaux particuliers

- Sinusoïde à phase aléatoire

$$x(n) = A \cos(2\pi fn + \phi) \rightarrow C_x(k) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi fk)$$

- Bruit blanc

$$C_x(k) = \delta(k)$$

Périodogramme d'une sinusoïde bruitée

On considère N échantillons d'une sinusoïde de fréquence f_0 et d'amplitude A perturbée par un bruit blanc de puissance σ^2 . Le périodogramme de ce signal est :

$$S_x(n) = \frac{1}{N} |X(n)|^2 \approx \sigma^2 + \frac{A^2}{4} \left(\frac{\sin(\pi(k - k_0))}{\sin(\frac{\pi(k - k_0)}{N})} + \frac{\sin(\pi(k + k_0))}{\sin(\frac{\pi(k + k_0)}{N})} \right), \text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

L'amplitude du pic à la fréquence $n = n_0$ correspond donc à $\frac{A^2}{4}N + \sigma^2 \approx \frac{A^2}{4}N$ ce qui permet d'estimer le rapport signal-à-bruit (SNR) :

$$SNR = 10 \log \left(\frac{\text{Puissance de la sinusoïde} = \frac{A^2}{2}}{\text{Puissance du bruit} = \sigma^2} \right)$$

1.2 Travail à effectuer

Lancer `corr_sp` sous Matlab.

Remarque : toutes les fréquences sont données en fréquences normalisées.

1.2.1 Autocorrélations

Autocorrélation d'un sinus

Générer 50 échantillons d'une sinusoïde de fréquence 0.1 (phase uniformément répartie sur $[0, 2\pi]$). Observer les estimations de son autocorrélation. Pour l'estimateur biaisé, quelle est l'allure du biais. Pour l'estimateur non biaisé, dans quelle partie de l'autocorrélation la variance est la plus importante. Expliquer.

Retrouver les caractéristiques du signal (puissance et fréquence).

Autocorrélation d'un carré

Générer un carré. Observer les estimations de son autocorrélation. Commenter.

Autocorrélation d'un bruit blanc

Générer un bruit blanc ($N = 100$). Observer les estimations de son autocorrélation. Des 2 estimations, laquelle paraît la plus satisfaisante ? Expliquer. Retrouver les caractéristiques du bruit.

Augmenter le nombre d'échantillons ($N = 1000$). Expliquer les changements.

Utiliser le bouton OK pour avoir différentes réalisations de bruit.

Autocorrélation d'un sinus bruité

Générer 500 échantillons d'une sinusoïde bruitée (bruit blanc additif) de fréquence 0.01 ($SNR = -7 dB$). Observer le signal et l'estimation biaisée de son autocorrélation. Déduire un intérêt des estimateurs de l'autocorrélation.

Retrouver les caractéristiques du signal (puissances du sinus et du bruit).

1.2.2 Estimations spectrales

Périodogramme d'un sinus

Générer une sinusoïde ($N = 128$, $f = 0.1$, nombre de points en fréquence = 128). Observer le périodogramme (fenêtre rectangulaire) (en linéaire et en log). Recommencer avec un nombre de

points en fréquence de 1024 (zero-padding). Que représente la valeur du périodogramme pour la fréquence 0 ? Expliquer. Retrouver les caractéristiques du signal (fréquence, puissance).

Pour $N = 100$ et $f = 0.25$, analyser et comparer les effets des différentes fenêtres. Classer-les en fonction de leur pouvoir à réduire l'amplitude des lobes secondaires (utiliser la représentation en log et le bouton *hold*).

Périodogramme de sinusoides

Charger le fichier *deuxsinpb1*. En utilisant les différentes fenêtres d'apodisation, donner les caractéristiques de ce signal.

Refaire la même analyse sur le fichier *deuxsinpb2*.

Périodogramme d'un carré

Générer un carré ($N = 100$, $f = 0.05$) et observer son périodogramme. Commenter.

Périodogramme et périodogramme cumulé d'un bruit blanc

Générer un bruit blanc ($N = 100$, nombre de points en fréquence : 2048). Observer son périodogramme. Retrouver les caractéristiques du signal (puissance et blancheur).

Noter la variance estimée du périodogramme. Augmenter le nombre d'échantillons ($N = 1000$). Comparer les variances (sur plusieurs réalisations). Commenter.

Cumuler les périodogrammes de différentes réalisations. Observer la variance estimée du périodogramme.

Périodogramme et périodogramme cumulé d'un sinus bruité

Générer une sinusoïde bruitée ($N = 200$, $f = 0.2$ et puissance du bruit 0.1). Retrouver les caractéristiques du signal (fréquence et puissances).

Générer une sinusoïde bruitée ($N = 200$, $f = 0.2$ et $SNR = -10\text{ dB}$). Cumuler les périodogrammes à l'aide du bouton "OK". Commenter.

Corrélogramme

Générer une sinusoïde ($N = 100$, $f = 0.2$ et 1024 points en fréquence). Choisir l'estimateur biaisé de l'autocorrélation et comparer le périodogramme et le corrélogramme. Expliquer.

Choisir l'estimateur non biaisé de l'autocorrélation et observer le corrélogramme. Quel est le principal inconvénient ?

1.3 Programmation Matlab

1.3.1 Quelques fonctions Matlab utiles dans le TP

`randn` : génération d'un bruit blanc normal centré et de variance 1

`fft` : calcul de la transformée de Fourier discrète

`fftshift` : recentre le spectre

`ifft` : calcul de la transformée de Fourier inverse

`xcorr` : autocorrélation

`specgram` : spectrogramme

`psd` : densité spectrale de puissance

Pour connaître le mode d'appel de ces fonctions, penser à l'aide en ligne de MATLAB : `help` 'nom de la fonction' ou `lookfor` 'mot'

1.3.2 Autocorrélations

Elle peut être calculée de la façon suivante :

```
for k=0:N-1,
autocorb(k+1) = fact*signal(1:N-k)*signal(k+1:N)';
end
```

avec `fact = 1/N` pour l'autocorrélation biaisée ou `1/(N-k)` pour l'autocorrélation non biaisée.

Il existe sous Matlab la fonction `xcorr`, avec les options `'biased'` et `'unbiased'`.

Pour la génération des différents signaux (sinus, carré, bruit blanc gaussien) voir les indications Matlab du TP1.

1.3.3 Estimations spectrales

Transformée de Fourier Discrète

L'instruction de base pour réaliser la transformée de Fourier discrète d'un signal `x` est `fft(x)`.

L'algorithme de transformée de Fourier rapide est utilisé par Matlab si et seulement si la longueur du vecteur `x`, `Nech`, est une puissance de 2. Si ce n'est pas le cas, on peut utiliser la technique du zero-padding pour s'y ramener :

```
nfft = 2^nextpow2(Nech); %calcul de la puissance de 2 immédiatement supérieure à
Nech
fft(x,nfft);
```

Exemple : Génération de 512 points d'un sinus de fréquence normalisée $f_0 = 0.2$

```
x=sin(2*pi*f0*(0:511));
```

Calcul de sa FFT et tracé du module (fonction `abs`) de sa FFT :

```
fft_de_x = fft(x,nfft);
```

Si l'axe des `x`, n'est pas spécifié dans la commande `plot` :

```
plot(abs(fft_de_x))
```

cet axe porte alors par défaut les indices des éléments du vecteur tracé (ici `0,1,2,... nfft-1`). Pour interpréter correctement le tracé de la Transformée de Fourier Discrète, il est nécessaire de le graduer, par exemple en fréquences normalisées par rapport à la fréquence d'échantillonnage :

```
axe_des_x = linspace(0,1,nfft)
plot(axe_des_x,abs(fft_de_x))
```

L'affichage du spectre peut être également recentré autour de zéro à l'aide de la commande `fftshift`, l'axe des `x` doit alors être modifié :

```
plot(linspace(-0.5,0.5,nfft),fftshift(abs(fft_de_x)))
```

Périodogramme et périodogramme cumulé

La densité spectrale de puissance (DSP) peut être estimée à l'aide du **périodogramme** :

```
den_puis = abs(fft(x,nfft)).^2./nfft;
```

On peut également utiliser le **périodogramme cumulé**. Cela consiste à :

- couper le signal en tranches de `Nt` points (**Nt doit être évidemment plus faible que la longueur totale du signal** et il est préférable que `Nt` soit une puissance de 2).
- faire une FFT de chacune des tranches (avec éventuellement du zéro-padding) et prendre le module au carré de la FFT,
- faire la moyenne de toutes les FFT en module au carré

Les tranches de signal peuvent ou non se recouvrir. Ces opérations peuvent être réalisées, par exemple, avec les fonction `spectrogram` ou bien `pwelch`.

Corrélogramme

Il suffit d'utiliser successivement `xcorr` et `fft`.

Chapitre 2

TP 2 : Filtrage Numérique

2.1 Rappels

Ce TP est consacré à l'étude des filtres à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF) et des Filtres à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII).

Dans le cas des filtres RIF, tout échantillon du signal en sortie est la somme pondérée d'échantillons du signal en entrée. Les filtres RIF sont fréquemment désignés par le terme de filtres non-récurrents, car ils ne présentent pas de boucle de réaction de la sortie vers l'entrée. Ils peuvent être synthétisés directement par un développement en série de Fourier du gabarit idéal. Le résultat obtenu peut être ensuite optimisé grâce à la méthode des moindres carrés ou à l'algorithme de Remez.

La synthèse des filtres RII ou filtres récurrents s'appuie sur les fonctions modèles du filtrage analogique (Tchebychev, Butterworth,...) par l'intermédiaire de la transformée bilinéaire, transformation conforme permettant de passer du plan numérique au plan analogique.

2.1.1 Filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)

Définition

Ce sont des systèmes à réponse impulsionnelle finie, de fonction de transfert $H(z)$, dont les coefficients $h(k)$ sont tels que :

$$\begin{aligned}h(k) &\neq 0 \text{ pour } k \in [0, N - 1] \\h(k) &= 0 \text{ pour } k \notin [0, N - 1]\end{aligned}$$

On obtient l'expression de la fonction de transfert dans le plan des z :

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) z^{-k}$$

Le caractère non récursif apparaît clairement sur l'équation de récurrence liant l'entrée et la sortie du filtre :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x(n-k)$$

Nous allons proposer une méthode de synthèse des filtres à phase linéaire (caractéristique recherchée dans de nombreuses applications). Ceci implique une symétrie de la réponse impulsionnelle. En effet, on veut :

$$H(f) = R(f) e^{j\Phi(f)} \text{ avec } R(f) \in \mathbb{R} \text{ et } \Phi(f) = -2\pi f\tau$$

la réponse impulsionnelle d'un tel filtre s'écrit :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(f) e^{j\Phi(f)} e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} R(f) e^{j2\pi f(t-\tau)} df$$

On décompose $R(f)$ en la somme d'une partie paire $R_p(f)$ et d'une partie impaire $R_i(f)$. La réponse impulsionnelle $h(t)$ étant réelle, on a :

$$h(\tau+t) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_p(f) \cos(2\pi ft) df = h(\tau-t)$$

Cette relation fait donc apparaître la symétrie de la réponse impulsionnelle par rapport au point $t = \tau$ de l'axe des temps.

Synthèse par développement en série de Fourier

On se donne un gabarit fréquentiel $H(\tilde{f})$ à respecter. On calcule la réponse impulsionnelle $h(k)$ du filtre recherché par transformée de Fourier inverse de ce gabarit. Il s'agit alors de faire une troncature afin de garder un nombre fini N d'éléments dans $h(k)$ qui seront les coefficients du filtre, puis d'effectuer un décalage afin de rendre le filtre causal c'est-à-dire physiquement réalisable.

Étapes successives de la synthèse :

- 1) Définir un gabarit fréquentiel en fréquences normalisées
- 2) Développer en série de Fourier

$$h(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} H(\tilde{f}) e^{j2\pi\tilde{f}k} d\tilde{f}$$

3) Multiplier $h(k)$ par une fenêtre temporelle $w(k)$ de longueur N (ordre du filtre) avec $w(k) = 0$ pour $|k| > N$,

4) Réaliser un décalage (translation) afin de satisfaire la condition de causalité. La valeur du temps de propagation de groupe est :

$$\tau_{pg} = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(\tilde{f})}{d\tilde{f}} = \frac{N-1}{2}$$

Synthèse avec des méthodes d'optimisation

La première méthode d'optimisation consiste à minimiser au sens des moindres carrés la distance entre le gabarit $H(f)$ désiré et le gabarit du filtre obtenu par la méthode précédente.

L'objectif de la seconde méthode d'optimisation est d'obtenir la meilleure approximation du gabarit $H(f)$ présentant des ondulations d'amplitude constante. Elle utilise une technique itérative : l'algorithme de Remez.

2.1.2 Filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)

Définition

Ces systèmes sont caractérisés par des réponses impulsionnelles de durée infinie : les coefficients $h(k)$ sont non nuls sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Ceci est réalisé par la présence de pôles dans la fonction de transfert du filtre :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} b_k z^{-k}}{\sum_{i=0}^{m-1} a_i z^{-i}}$$

Cela se traduit par l'équation suivante :

$$y(n) = - \sum_{i=1}^{m-1} a_i y(n-i) + \sum_{k=0}^{p-1} b_k x(n-k)$$

La condition de stabilité impose que les pôles de $H(z)$ soient à l'intérieur du cercle unité. La réponse impulsionnelle infinie permet d'obtenir un filtrage plus sélectif qu'un filtre *RIF* pour une quantité de calcul inférieure. La linéarité de la phase est, en théorie, impossible. Cependant on peut l'obtenir approximativement dans une bande limitée.

Synthèse

On passe tout d'abord du gabarit numérique $H(\tilde{f})$ souhaité au gabarit analogique $H(f)$ correspondant, en réalisant une prédistorsion de l'axe fréquentiel (voir remarque : anticipation sur la distorsion de l'axe fréquentiel introduite par la transformée bilinéaire) :

$$f = \frac{1}{\pi T_e} \tan(\pi f T_e)$$

On choisit une fonction analogique modèle et on détermine ses paramètres afin d'obtenir la fonction de transfert $H(p)$ du filtre respectant le gabarit analogique souhaité.

Enfin, on obtient la fonction de transfert $H(z)$ du filtre numérique par application de la transformation bilinéaire.

$$H(z) = [H(p)]_{p=\frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Remarques :

1) Exemples de modèles passe-bas analogiques de pulsation de coupure ω_c :

$$\text{Butterworth d'ordre } n : \quad |H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

$$\text{Tchebychev d'ordre } n : \quad |H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega)}$$

$$\text{avec } \begin{cases} T_n(\omega) = \cos(n \operatorname{Ar} \cos(\omega)) & \text{si } |\omega| \leq 1 \\ T_n(\omega) = \operatorname{ch}(n \operatorname{Arch}(\omega)) & \text{si } |\omega| > 1 \end{cases}$$

2) La transformation bilinéaire introduit une déformation des fréquences :

$$\tilde{f} = \frac{1}{\pi} \arctan(\pi f T_e)$$

avec \tilde{f} fréquence numérique, f fréquence analogique et T_e période d'échantillonnage.

2.2 Travail à effectuer

Lancer `filtnum` sous MATLAB.

2.2.1 Introduction

Le TP permet de synthétiser des filtres numériques RIF et RII. Les filtres RIF peuvent être calculés par un développement en série de Fourier avec différentes fenêtres (rectangulaire, triangulaire, de Hamming et de Kaiser) et par deux méthodes d'optimisation (par les moindres carrés et par Remez).

Les méthodes proposées pour les filtres RII utilisent des modèles analogiques connus (Butterworth, Chebychev I, Chebyshev II et elliptique).

L'intérêt sera porté tout d'abord sur les caractéristiques des filtres RIF, puis sur celles des filtres RII. Chacune de ces études sera suivie par exemples de filtrage de signaux réels.

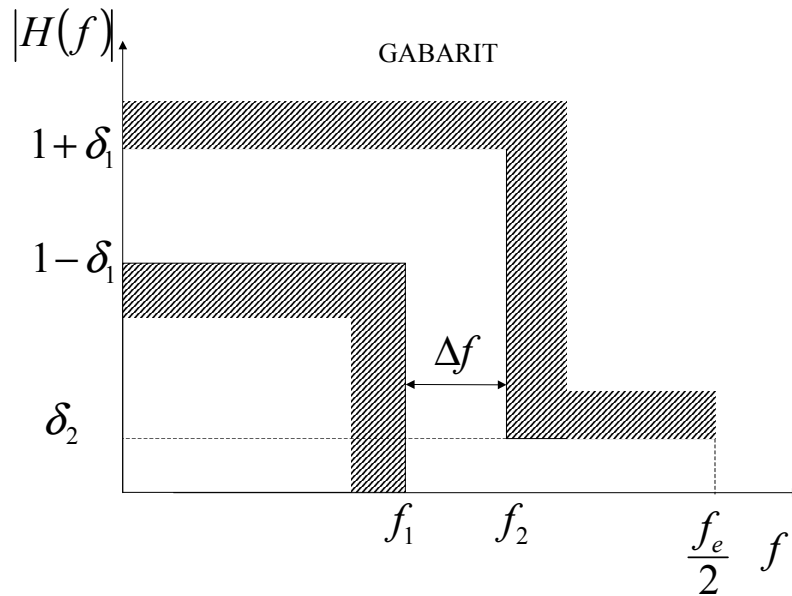
2.2.2 Gabarit

Le gabarit du filtre est défini par l'utilisateur parmi les quatre catégories suivantes :

- Filtre passe-bas
- Filtre passe-haut

- Filtre coupe-bande
- Filtre passe-bande

On peut régler F_e la fréquence d'échantillonnage, Δf la largeur de la zone de transition, δ_1 l'amplitude des ondulations en bande passante et δ_2 l'amplitude des oscillations en bande atténuée.



2.2.3 Filtres à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)

Calcul des coefficients par développement en série de Fourier

- **Evaluation de l'ordre**

Possédant les caractéristiques du gabarit à respecter, il est possible de calculer quel devra être l'ordre N (très approximatif et en général sous-estimé) :

$$N = \frac{2}{3} \log_{10} \left(\frac{1}{10\delta_1\delta_2} \right) \frac{f_e}{\Delta f}$$

Repérer les paramètres F_e , Δf , δ_1 et δ_2 sur le tracé du gabarit et calculer N .

- **Influence de la fenêtre**

Observer les fonctions de transfert obtenues en utilisant les quatre types de fenêtres disponibles (raideur de la pente de la transition, amplitude des oscillations). Quels sont les avantages et les inconvénients de chacune ?

- Observer le temps de propagation de groupe.

- **Influence de l'ordre**

On appelle ordre optimal d'un filtre numérique, l'ordre minimal tel que le gabarit fréquentiel soit respecté. Faire varier l'ordre du filtre dans une plage incluant l'ordre optimal N . Mesurer son influence sur les paramètres suivants :

- la raideur de la pente
- la position de la fréquence de coupure
- la fréquence des oscillations
- l'allure du temps de propagation de groupe

Réponse impulsionnelle et réponse indicielle

- Observer la réponse impulsionnelle d'un filtre RIF. Retrouver les coefficients du filtre. Justifier son aspect symétrique. Retrouver le temps de propagation de groupe.
- Quelles remarques peut-on faire sur la réponse indicielle (allure générale, nombre d'oscillations en fonction de l'ordre, ...) ?

Filtrage d'un signal

- Vérifier la nature du filtre en lui imposant en entrée un bruit blanc.
- Observer l'existence d'un retard entre le signal initial et le signal filtré ? Quelle est son origine ?

2.2.4 Filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)

Synthèse avec un Butterworth

- **Evaluation de l'ordre** : Il existe un grand nombre de formules permettant d'estimer l'ordre du filtre numérique à partir du gabarit que l'on s'impose. Ces formules ne sont applicables que pour un certain type de filtre. A titre d'exemple, on donne :

$$N \geq \frac{\log\left(\frac{1}{\delta_2\sqrt{2\delta_1}}\right)}{\log \tan(\pi f_2 T_e) - \log \tan(\pi f_1 T_e)}$$

avec f_1 fréquence de fin de bande 1 ($[0, f_1]$), f_2 fréquence de début de bande 2 ($[f_2, F_e/2]$). Cette formule n'est utilisable que pour des filtres passe-bas ou passe-haut de type Butterworth avec δ_1 et δ_2 petits. On notera qu'elle ne s'applique pas toujours pour les gabarits générés dans le TP car δ_1 n'est pas suffisamment faible. Dans ce cas, on fixera un ordre suffisamment

grand permettant de respecter le gabarit puis on diminuera progressivement cet ordre afin d'obtenir l'ordre optimal. Observer l'influence de l'ordre :

- sur la pente
- sur le temps de propagation de groupe : comment évoluent le temps de propagation de groupe, la valeur des maxima et les fréquences correspondant à ces maxima? *Pourquoi peut-il être très gênant d'avoir des temps de propagation très différents dans la bande passante?*

Synthèse par un Tchebychev

- **Influence de l'ordre** : Comme pour le filtre synthétisé par Butterworth, mesurer successivement la raideur de la pente, la position des fréquences de coupure (à -3dB), les oscillations dans la bande passante, la valeur du temps de propagation de groupe.

Comparaison

- Observer les fonctions de transfert obtenues par les quatre méthodes proposées (Butterworth, Chebyshev I et de Chebychev II et elliptique) : valeur de la pente, position et amplitude du premier lobe d'oscillation. Quelle est la différence entre les méthodes de Chebyshev I et de Chebychev II ? En quoi la méthode elliptique est-elle optimale ?
- Observer le temps de propagation de groupe. Quelles conséquences va-t-il entraîner ?

Réponse impulsionnelle et réponse indicielle

- Observer la réponse impulsionnelle d'un filtre RII.
- Quelles remarques peut-on faire sur la réponse indicielle (allure générale, nombre d'oscillations en fonction de l'ordre, ...) ?

Filtrage d'un signal

- Vérifier la nature du filtre en lui imposant en entrée un bruit blanc.
- A l'aide d'un signal (NRZ, somme de sinus), étudier l'influence du temps de propagation de groupe sur la réponse du filtre.

2.2.5 Conclusion

Donner les avantages et les inconvénients respectifs des filtres RIF et des filtres RII. En particulier, comparer leurs réponses aux différents signaux proposés.