



Première Année Télécommunications et réseaux

Traitement Numérique du Signal Bases

Copies de transparents

Nathalie Thomas – Nicolas Dobigeon

Plan du cours/TD

Chapitre 1

Introduction, estimation numérique de l'intercorr et de la DSP

- Introduction :
 - o avantages/inconvénients du numérique,
 - o rappel rapide échantillonnage / quantification,
 - o notion de temps de calcul, de temps réel.

- Estimation des fonctions d'auto et d'intercorrélations :
 - o estimateurs temporel : biaisé, non biaisé, exemple sur un sinus.
 - o estimateur fréquentiel : diminution du temps de calcul, condition = savoir faire la TF discrète et qu'elle transforme un produit en produit de convolution (voir par la suite).
 - o Propriétés de l'auto/inter corrélation numérique.

- Estimation de la DSP :
 - o Périodogramme
 - o Corrélogramme (biaisé = périodogramme, non biaisé)
 - o Versions modifiées pour diminuer la variance : périodogramme cumulé (Bartlett) et périodogramme de Welch.
 - o Exemple sur une ligne d'image SAR.

Conclusion : que ce soit pour estimer les intercorr ou les DSPs, il faut savoir faire la Transformée de Fourier Discrète (TFD).

Chapitre 2 : la TFD

- De la TF à la TFD :
 - o Echantillonnage temporel => périodisation spectrale,
 - !! condition de Shannon
 - !! Lecture d'un spectre numérique (entre 0 et F_e , partie >0 puis partie <0)
 - o Limitation de la durée du signal => spectre convolué par la TF de la fenêtre de troncature.
 - conséquences en analyse spectrale et en filtrage numérique,
 - TFD pondérée (pouvoir séparateur, taux d'ondulation)
 - o On ne sait calculer que certains points du spectre => mauvaise visualisation avec exemple sur le cosinus
 - interpolation par Zero Padding.

- Exercices pour reprendre les différentes approximations sur des exemples.

- Propriétés de la TFD : voir transparents,
 - o !! convolution circulaire,
 - o principe de l'algo de la FFT (Fast Fourier Transform).

Chapitre 3 Outil d'étude des filtres numériques : la TZ

- Equivalent discret de la transformée de Laplace, contient la TFD mais permet en plus l'étude temporelle des filtres (stabilité, temps de réponse, précision...).
- Définition et propriétés : voir transparents.
- Exercices de manipulation de la TZ.

Chapitre 4 : le filtrage numérique (Filtres numériques linéaires, invariants dans le temps)

- Outil d'étude : la TZ (voir cours précédent)
- Définitions :
 - linéarité,
 - invariance dans le temps,
 - réponse impulsionnelle numérique $h(k)$,
 - fonction de transfert $H(z)$,
 - réponse en fréquence, Temps de Propagation de Groupe (TPG)
- Réalisabilité :
 - causalité,
 - stabilité,
 - réponse impulsionnelle réelle.
- Filtres numériques rationnels
 - par analogie avec les filtres analogiques => fonction de transfert rationnelle en z ,
 - TZ inverse => équation de récurrence en temporel.
 - Filtres à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF).
 - Filtres à réponse Impulsionnelle Infinie (RII).
 - Stabilité,
 - Causalité.
- Synthèse des filtres numériques rationnels
 - Notion de temps réel.
 - Notion de gabarit à respecter.
 - Synthèse des RIF, avec exemple sur un passe-bas.
 - Méthode de synthèse des RII et distribution d'une synthèse de RII guidée à faire pour le deuxième TP pendant afin d'implanter le filtre obtenu.
- Implantation des filtres numériques rationnels
 - Les différentes implantation possibles en temps réel (transparents)
=> généralement cellules du second et du premier ordre cascadiées (série ou parallèle)
 - Exercice : étude de la cellule du second ordre : triangle de stabilité, condition de résonance, ampleur de la résonance...

Bibliographie

- Traitement numérique du signal, théorie et pratique, M. Bellanger, Masson, collection CENT-ENST.
- Traitement numérique des signaux, M. Kunt, Dunod, Traité d'électricité, d'électronique et d'électrotechnique.
- Traitement numérique du signal, bases, F. Castanié, polycopié ENSEEIHT.

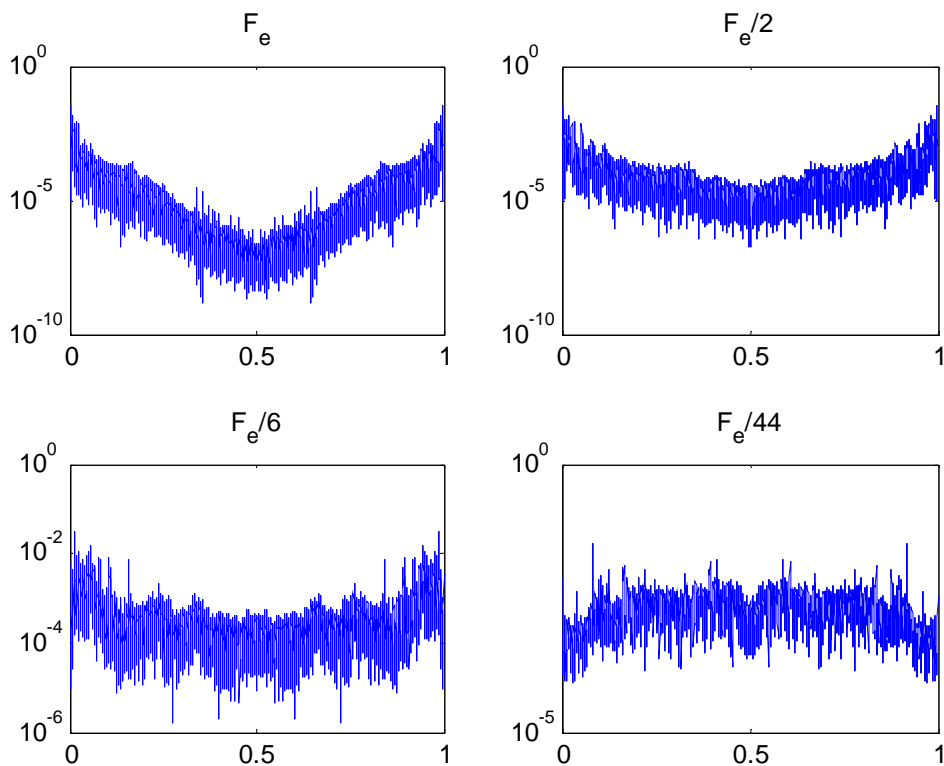
Chapitre 1

Introduction, estimation numérique de l'intercorr et de la DSP

Echantillonnage : exemple sur des fichiers son

```
%fichier d'origine (PAROLE)
[y,fe,bits] = wavread('M16b_44K.wav');
sound(y,fe);
figure(1)
Y=(1/length(y))*fft(y,2^nextpow2(length(y)));
subplot(2,2,1)
semilogy(linspace(0,1,2^nextpow2(length(y))),abs(Y))
title('F_e')
input('enter')

%sous échantillonnage d'un facteur nech
nech=2; %puis 4, 6 et 44
[y,fe,bits] = wavread('M16b_44K.wav');
wavwrite(y(1:nech:end),fe/nech,'sortie.wav');
[y1,fe1,bits] = wavread('sortie.wav');
sound(y1,fe1);
figure(1)
subplot(2,2,2)
Y1=(1/length(y1))*fft(y1,2^nextpow2(length(y1)));
semilogy(linspace(0,1,2^nextpow2(length(y1))),abs(Y1))
title(['F_e/' int2str(nech)])
input('enter')
```

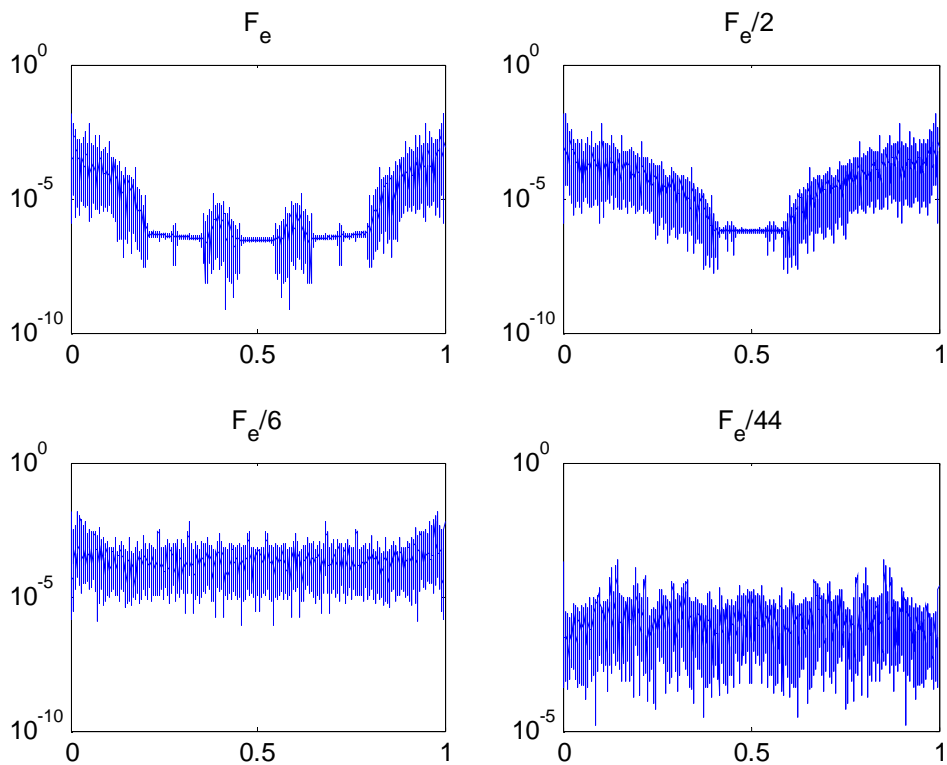


```

%fichier d'origine (MUSIQUE)
[y,fe,bits] = wavread('blues_40K.wav');
sound(y,fe);
figure(1)
Y=(1/length(y))*fft(y,2^nextpow2(length(y)));
subplot(2,2,1)
semilogy(linspace(0,1,2^nextpow2(length(y))),abs(Y))
title('F_e')
input('enter')

%sous échantillonnage d'un facteur nech
nech=2; %puis 4, 6 et 44
[y,fe,bits] = wavread('M16b_44K.wav');
wavwrite(y(1:nech:end),fe/nech,'sortie.wav');
[y1,fe1,bits] = wavread('sortie.wav');
sound(y1,fe1);
figure(1)
subplot(2,2,2)
Y1=(1/length(y1))*fft(y1,2^nextpow2(length(y1)));
semilogy(linspace(0,1,2^nextpow2(length(y1))),abs(Y1))
title(['F_e/' int2str(nech)])
input('enter')

```



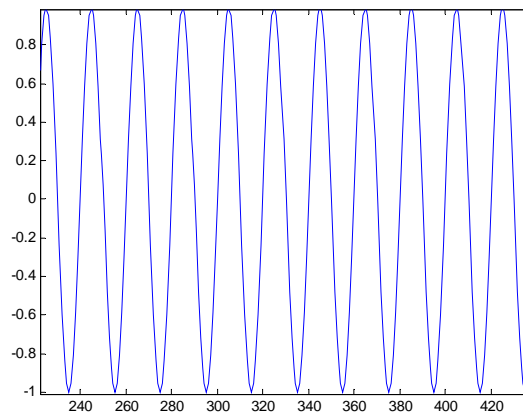
Chapitre 1

Introduction, estimation numérique de l'intercorr et de la DSP

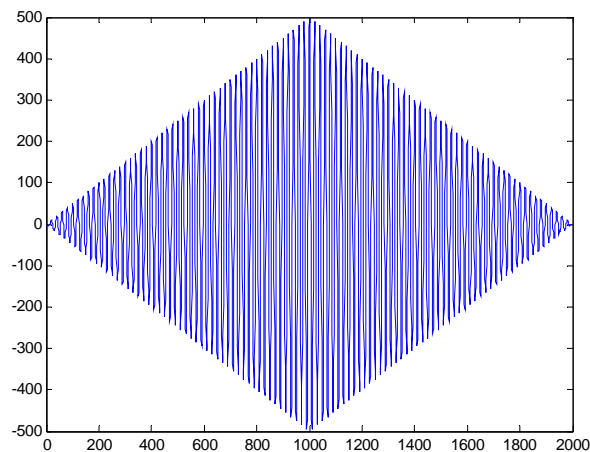
Exemple d'estimation de la fonction d'autocorrélation (cosinus) :

```
% Indices du tableau de points de signal
k=[1:1000];
% Fréquence du cosinus
f=10000;
% Période d'échantillonnage
Te=5*10^(-6);
% Génération du cosinus numérique = tableau de points d'un sinus de
fréquence f % échantillonné à Fe=1/Te
x=cos(2*pi*f*k*Te);
%Tracé du cosinus
figure;
plot(x);

%Tracé du spectre du cosinus
X=fft(x)
figure;
plot(X);
```



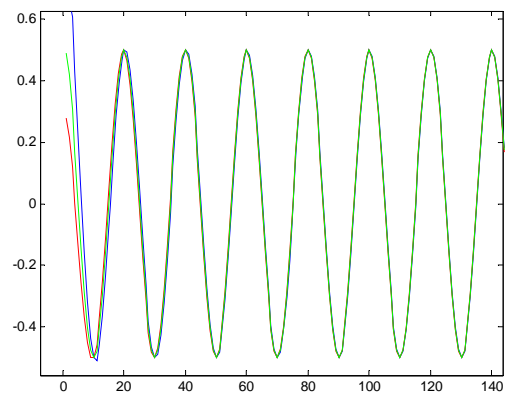
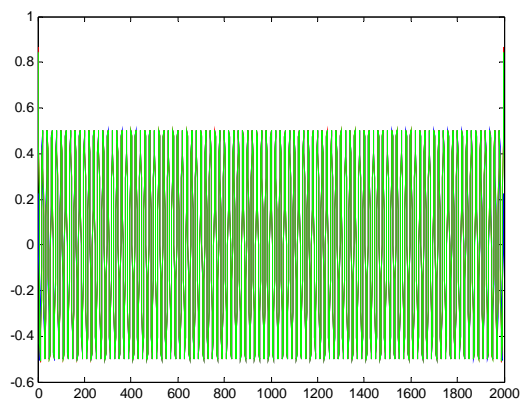
```
% Calcul et tracé de son autocorrélation biaisée
Rx=xcorr(x);
figure
plot(Rx);
```



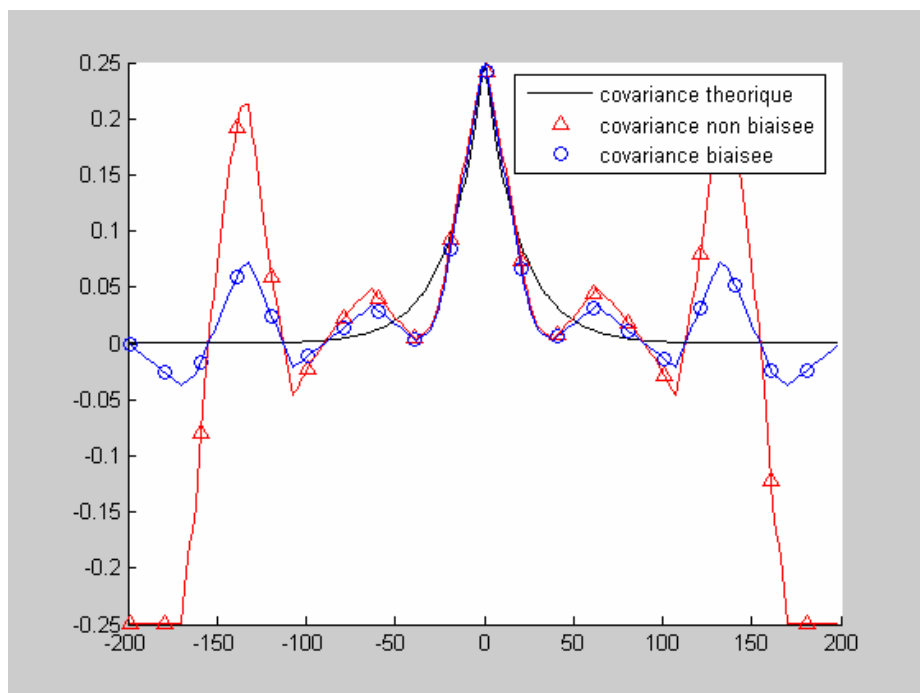
```

% Calcul et tracé de son autocorrélation non biaisée
% pour différentes réalisations du cosinus
%Visualisation de la variance de l'estimateur dans le cas non biaisé
%première réalisation
x1=cos(2*pi*f*k*Te+rand*2*pi);
Rx1=xcorr(x1, 'unbiased');
figure
plot(Rx1)
hold on
%deuxième réalisation
x2=cos(2*pi*f*k*Te+ rand*2*pi);
Rx2=xcorr(x2, 'unbiased');
plot(Rx2, 'r')
%troisième réalisation
x3=cos(2*pi*f*k*Te+ rand*2*pi);
Rx3=xcorr(x3, 'unbiased');
plot(Rx3, 'g')

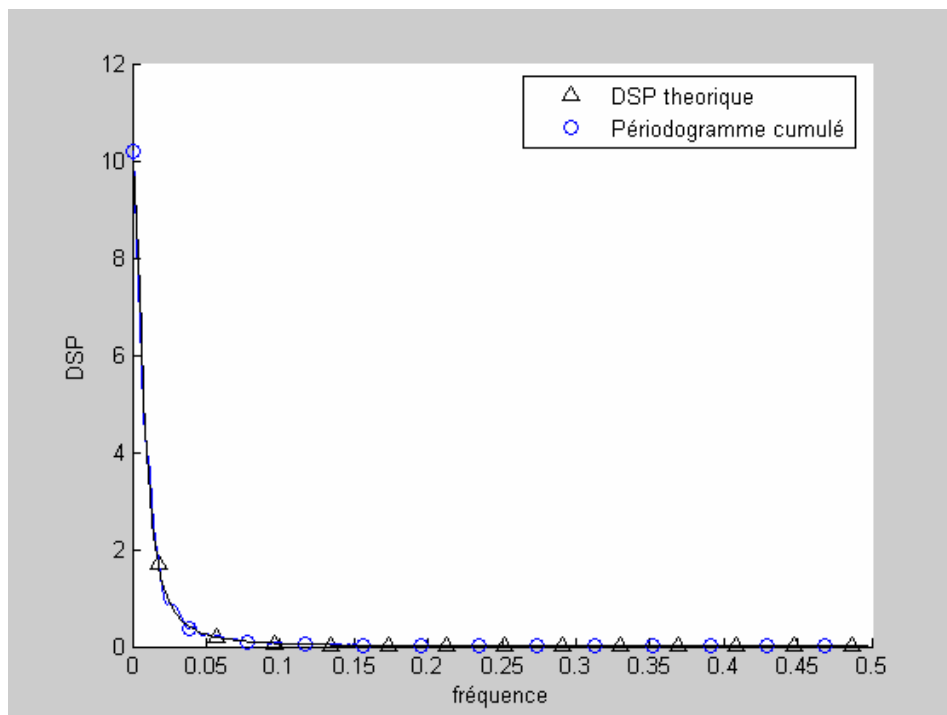
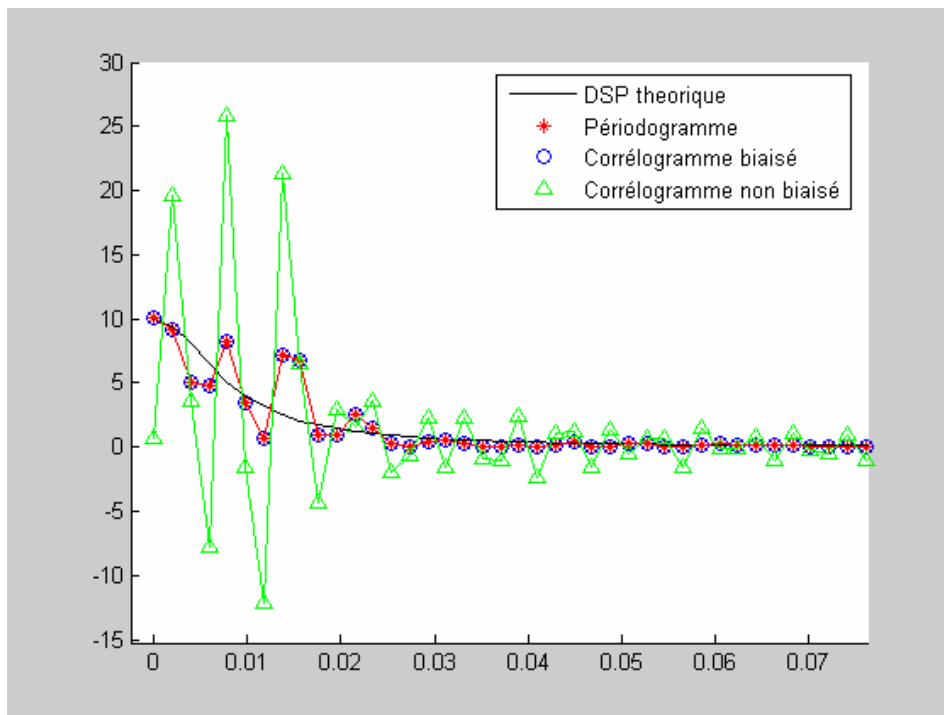
```



Exemple d'estimation de la fonction d'autocorrélation (ligne d'image SAR) :



Exemple d'estimation de la DSP (ligne d'image SAR) :

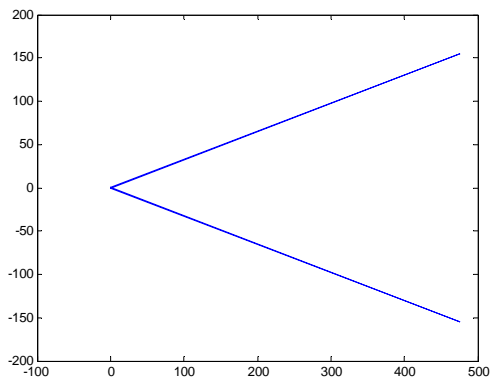


Chapitre 2 La transformée de Fourier Discrète

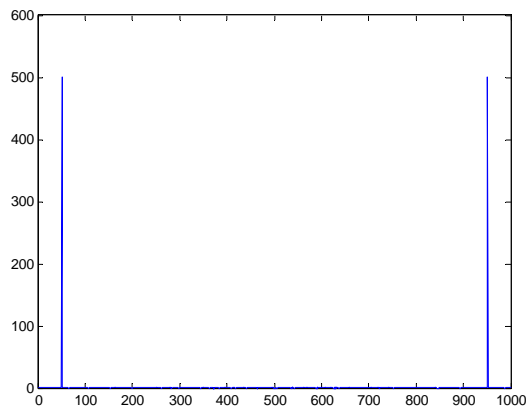
De la TF à la TFD : Echantillonnage temporel (exemple sur un cosinus)

```
% Indices du tableau de points de signal
k=[1:1000];
% Fréquence du cosinus
f=10000;
% Période d'échantillonnage
Te=5*10^(-6);
% Génération du cosinus numérique = tableau de points d'un sinus de
fréquence f % échantillonné à Fe=1/Te
x=cos(2*pi*f*k*Te);
%Tracé du cosinus
figure;
plot(x);

%Tracé du spectre du cosinus
X=fft(x)
figure;
plot(X);
```



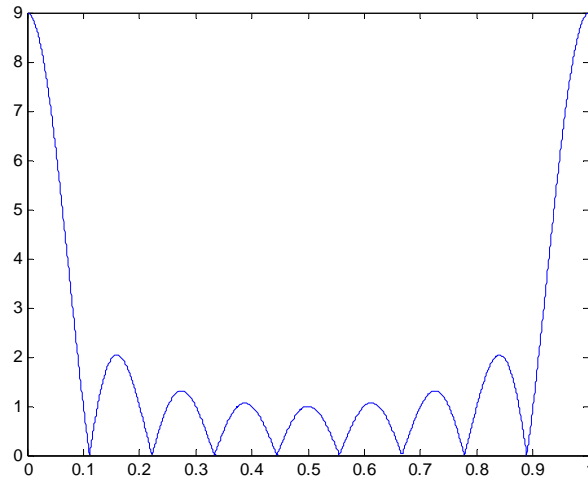
```
!! la TF est complexe => Tracé du module du spectre du cosinus
X=fft(x)
figure;
plot(abs(X));
```



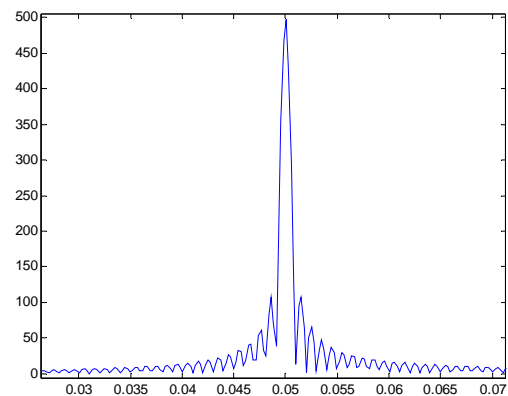
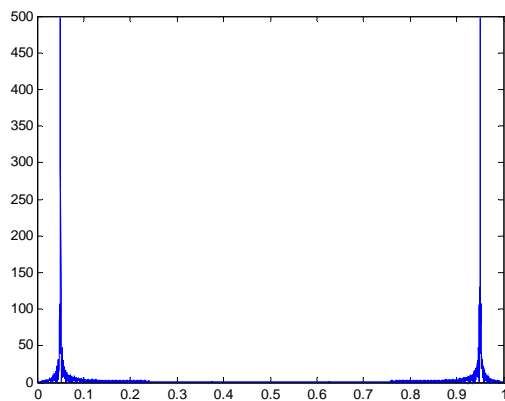
!! Lecture du spectre !!

De la TF à la TFD : Troncature du signal (exemple sur un cosinus)

```
%Génération d'un noyau de Dirichlet  
w=ones(1,9);  
W=fft(w,2048);  
figure  
plot(linspace(0,1,2048),abs(W));
```



```
% Génération du spectre d'un cosinus => visualisation du noyau de Dirichlet  
% à la place des Diracs  
X=fft(x,4096);  
figure  
plot(linspace(0,1,4096),abs(X));  
zoom on
```



```
%Comparaison des TFDs de fenêtres de troncature  
t=[1:100];  
N=length(t);  
  
w=ones(1,100);  
X=fft(w,4096);  
subplot(3,1,1)  
semilogy(linspace(0,1,4096),abs(X));  
axis([0 0.2 0 100])  
title('TFD fenetre rectangulaire');
```

```

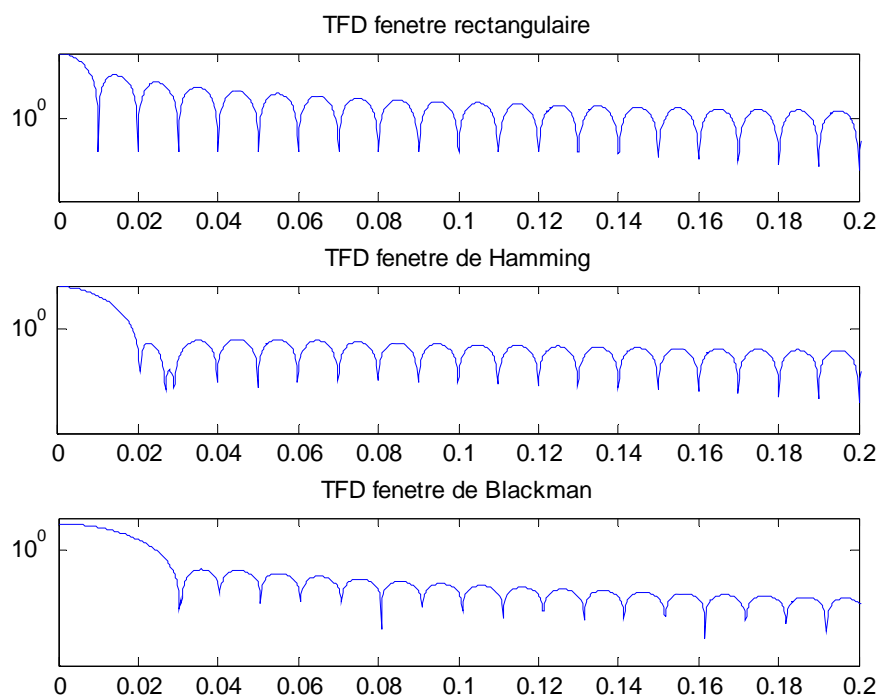
w=window(@hamming,N);
X=fft(w,4096);
subplot(3,1,2)
semilogy(linspace(0,1,4096),abs(X));
axis([0 0.2 0 60])
title('TFD fenetre de Hamming');

```

```

w=window(@blackman,N);
X=fft(w,4096);
subplot(3,1,3)
semilogy(linspace(0,1,4096),abs(X));
axis([0 0.2 0 100])
title('TFD fenetre de Blackman');

```



De la TF à la TFD : Zero Padding

`%Effet du Zero Padding`

`% Génération du spectre du cosinus sans zero padding`

`X=fft(x)`

`figure;`

`plot(linspace(0,1,length(x)),abs(X));`

`% Génération du spectre du cosinus avec zero padding`

`X=fft(x,1024)`

`figure;`

`plot(linspace(0,1,1024),abs(X));`

`X=fft(x,2048)`

`figure;`

`plot(abs(X));`

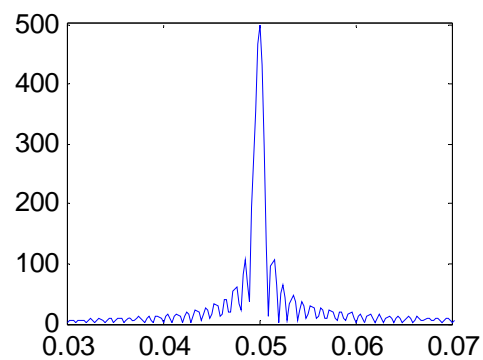
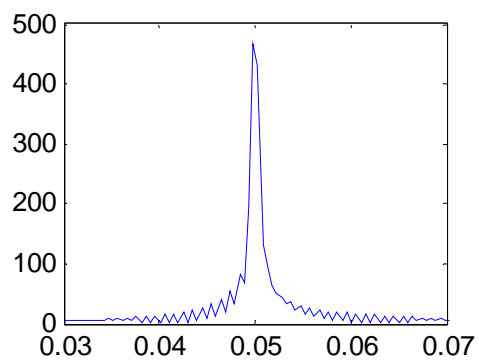
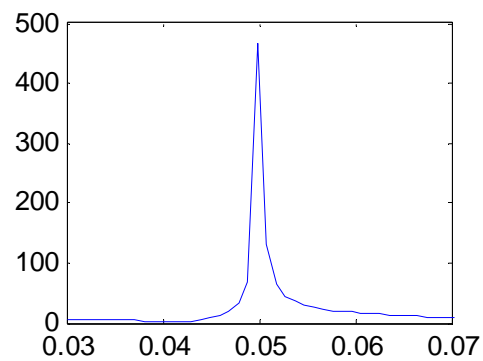
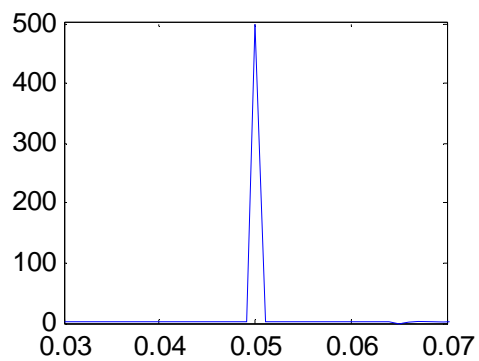
`plot(linspace(0,1,2048),abs(X));`

`X=fft(x,4096)`

`figure;`

`plot(linspace(0,1,4096),abs(X));`

Zoom premier lobe :



Chapitre 2

La transformée de Fourier Numérique

Exercice 1 : échantillonnage

Soit le signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, $f_0 = 10\text{kHz}$.

- 1- Tracer la transformée de Fourier de $x(t)$: $X(f)$.
- 2- Ce signal est-il échantillonnable ?
- 3- Tracer la transformée de Fourier du signal $x(t)$ échantillonné ($\{x(kT_e)\}_{k=-\infty}^{+\infty}$) en utilisant les fréquences d'échantillonnage suivantes :
 - a- $F_e = 40\text{kHz}$
 - b- $F_e = 20\text{kHz}$
 - c- $F_e = 7\text{kHz}$
- 4- On souhaite restituer le signal $x(t)$ à partir de la suite des échantillons, quel sera le signal restitué dans les cas a, b et c de la question précédente

Exercice 2 : Etude de la TFD d'un signal à spectre continu

Soit le signal $x(t)$ défini par :

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0, a > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- 1- Observation du signal sur une durée limitée L
 - a- Montrer que la transformée de Fourier du signal observé sur une durée $[0, L]$ s'écrit :
$$X_L(f) = X(f)G(f, L)$$
 - b- Donner un encadrement du module de $G(f, L)$, le chiffrer pour $L = \frac{4}{a}$.
 - c- Donner une valeur approchée de la phase de $G(f, L)$ dans le cas où $L \gg \frac{1}{a}$, la borner puis la chiffrer pour $L = \frac{4}{a}$.
 - d- Conclusions ?
- 2- Echantillonnage du signal
 - a- Le signal $x(t)$ est-il échantillonnable ?
 - b- En considérant le spectre comme négligeable pour une atténuation minimale de 40 dB par rapport à sa valeur maximum, dimensionner la fréquence d'échantillonnage à utiliser.
 - c- Déterminer la transformée de Fourier du signal échantillonné : $X_e(f)$. Vérifier qu'elle est périodique de période F_e . La comparer à $X(f)$.
- 3- Déterminer la transformée de Fourier du signal échantillonné et observé sur N points : $X_D(f)$.

Exercice 3 : Etude de la TFD d'un signal à spectre discontinu

Soit le signal $x(t)$ défini par :

$$x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \Phi)}, t \in \mathfrak{R}$$

- 1- Calculer la transformée du signal sur une durée limitée L : $X_L(f)$. La comparer à $X(f)$.
- 2- Déterminer la transformée de Fourier du signal échantillonné et observé sur N points : $X_D(f)$. La comparer à $X_L(f)$.
- 3- Déterminer la transformée de Fourier numérique du signal échantillonné et observé sur N points : $X_D(n)$ dans les deux cas suivants :

a- La fréquence f_0 est commensurable avec F_e , c'est-à-dire :

$$f_0 = \frac{k_0}{N} F_e, k_0 \text{ entier}$$

b- La fréquence f_0 n'est pas commensurable avec F_e , c'est-à-dire :

$$f_0 = \frac{k_0 + \varepsilon}{N} F_e, k_0 \text{ entier}, 0 < \varepsilon < 1$$

Conclusion ?

Chapitre 2 La transformée de Fourier Discrète

Propriétés de la TFD

→ Linéarité

$$TFD [x_1(k) + \lambda x_2(k)] = TFD [x_1(k)] + \lambda TFD [x_2(k)], \lambda \text{ scalaire}$$

→ Translation => rotation de phase

$$\begin{aligned} x(k) &\rightarrow X(n) \\ x(k - k_0) &\rightarrow X(n) e^{-j2\pi \frac{k_0 n}{N}} \end{aligned}$$

→ Symétrie hermitienne

$$\begin{aligned} x(k) \text{ reel} &\rightarrow X(-n) = X^*(n) \\ X(N - n) &= X(-n) = X^*(n) \text{ si } x \text{ reel} \end{aligned}$$

→ Convolution circulaire

$$X_1(n) \cdot X_2(n) \rightarrow x_1(k) \otimes x_2(k) = \sum_{p=0}^{N-1} x_1(p) x_2([k - p]_{\text{modulo } N})$$

→ Egalité de Parseval

$$\sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |X(n)|^2$$

→ Transformée de Fourier rapide (FFT), Algorithme de base (Cooley Tuckey)

- Principe : décomposition en sous suites entrelacées.
- Condition : le nombre de points de signal (N) est une puissance de 2.
- Temps de calcul : $N \log_2 N \ll N^2$
- Algorithme de retournement binaire

Chapitre 2 La transformée de Fourier Discrète

Fast Fourier Transform (FFT) : algorithme de base

TFD d'ordre $N \Rightarrow N^2$ opérations $+/*$

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j2\pi\frac{kn}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)W_N^{-kn}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)W_N^{-kn}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

Condition : $N=2^p$

Première décomposition = 2 TFD d'ordre $N/2 \Rightarrow 2(N/2)^2 + N$ opérations $+/* \ll N^2$

$$X(n) = X_1(n) + W_N^{-n}X_2(n), \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$X_1(n) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i)W_{N/2}^{-in}, \quad i = 0, \dots, N/2-1 \quad X_2(n) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1)W_{N/2}^{-in}, \quad i = 0, \dots, N/2-1$$

Deuxième décomposition = 4 TFD d'ordre $N/4$

$$X_1(n) = X_{11}(n) + W_{N/2}^{-n}X_{12}(n) \quad X_2(n) = X_{21}(n) + W_{N/2}^{-n}X_{22}(n)$$

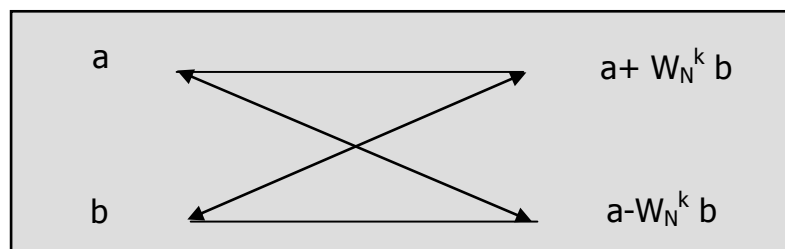
...

N^p TFD d'ordre 2 $\Rightarrow N \log_2 N$ opérations $+/* \ll N^2$

Papillon d'ordre 2
(2 entrées-2 sorties)



algorithme radix-2



Chapitre 3

Outil d'étude des filtres numériques : la TZ

Définition

On définit la transformée en Z d'une suite par :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Notation :

$$X(z) = TZ[x(n)]$$

Vocabulaire : TZ bilatérale et TZ unilatérale

Domaine de Convergence

La région de convergence est l'ensemble des nombres z complexes tels que la série X(z) converge.

Rappel : critère de Cauchy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u(n)|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u(n) \text{ converge}$$

On a une condition suffisante de convergence. A l'aide de ce critère, on montre que la série converge X(z) dès que :

$$0 \leq R_x^- < |z| < R_x^+ \leq +\infty$$

Exemple :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} \text{ converge pour } |z| > 1$$

Propriétés

- Linéarité

$$TZ[ax(n) + by(n)] = aTZ[x(n)] + bTZ[y(n)]$$

Convergence :

$$\text{si } R^+ = \text{Min}(R_x^+, R_y^+) \text{ et } R^- = \text{Max}(R_x^-, R_y^-)$$

alors le domaine de convergence contient $]R^-, R^+[$

- Décalage

$$TZ[x(n - n_0)] = z^{-n_0} X(z)$$

Même domaine de convergence que pour X(z).

- Changement d'échelle

$$TZ[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Domaine de convergence :

$$|a|R_x^- < z < |a|R_x^+$$

- Dérivabilité

La transformée en Z définit une série de Laurent qui est indéfiniment dérivable terme à terme dans son domaine de convergence.

On en déduit :

$$TZ (nx(n)) = -z \frac{dX(z)}{dz}$$

Même domaine de convergence que pour X(z).

- Produit de convolution

Le produit de convolution entre les suites x(n) et y(n) est défini par :

$$x(n) * y(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(k)y(n - k)$$

On a alors

$$TZ [x(n) * y(n)] = X(z)Y(z),$$

et sa région de convergence de peut être plus large que l'intersection des régions de convergence de X(z) et de Y(z).

- TZ inverse

La transformée en Z inverse est définie par :

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi} \int_{C^+} X(z)z^{n-1} dz$$

où C est un contour fermé inclus dans l'anneau de convergence.

Preuve

L'expression de la transformée en Z inverse découle directement du calcul de l'intégrale

$$J(n, k) = \int_{C^+} z^{n-k-1} dz$$

A l'aide du théorème des résidus, on montre :

$$J(n, k) = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq k, \\ j2\pi & \text{if } n = k. \end{cases}$$

On en déduit alors :

$$\frac{1}{j2\pi} \int_{C^+} X(z)z^{n-1} dz = \frac{1}{j2\pi} \int_{C^+} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{-k} \right) z^{n-1} dz = \frac{1}{j2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)J(n, k) = x(n)$$

Remarque : existence de tables

Applications aux équations récurrentes

Etude d'un exemple : système linéaire du premier ordre

$$y(n) - ay(n-1) = x(n), \quad |a| < 1$$

L'entrée de ce système est définie par :

$$x(n) = b^n u(n), \quad \text{avec } |b| < 1$$

où $u(n)$ est l'échelon de Heaviside.

- Déterminer $y(n)$ pour $n \geq 0$, sachant que $y(n) = 0$ pour $n < 0$.
- Déterminer la réponse impulsionnelle du système $h(n)$ telle que

$$y(n) = x(n) * h(n).$$

Chapitre 3
Outil d'étude des filtres numériques : la TZ

Exercice 1 :

Soit $u(n)$ l'échelon de Heaviside et soit a un réel tel que $a \in]0,1[$.

- 1- Déterminer la transformée en z du signal $x(n) = a^n u(n)$, avec $|a| < 1$, et préciser avec soin la région de convergence de $X(z)$.
- 2- Déterminer la transformée en Z du signal $y(n) = -a^n u(-n-1)$, avec $|a| < 1$, et préciser avec soin la région de convergence de $Y(z)$.
- 3- Soit b un réel tel que $b > a$. On considère un système de fonction de transfert.

$$H(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})}$$

Déterminer la réponse impulsionnelle $h(n)$ dans les trois cas suivants

- la région de convergence de $H(z)$ est $|z| < a$,
- la région de convergence de $H(z)$ est $a < |z| < b$,
- la région de convergence de $H(z)$ est $|z| > b$.

Exercice 2 :

Soit le système d'entrée $x(n)$ et de sortie $y(n)$ défini par l'équation aux différences suivante :

$$y(n) - a y(n-1) = x(n), \text{ avec } |a| < 1$$

- 1- Soit $x(n) = b^n u(n)$ avec $|b| < 1$. Déterminer sa transformée en z , ainsi que son domaine d'existence.
- 2- Déterminer la réponse du système à l'entrée $x(n)$ définie à la question précédente, en supposant que le système est causal.
- 3- Déterminer la fonction de transfert, ainsi que la réponse impulsionnelle du système.

Exercice 3 :

Soit le système d'entrée $x(n)$ et de sortie $y(n)$ défini par l'équation aux différences suivante :

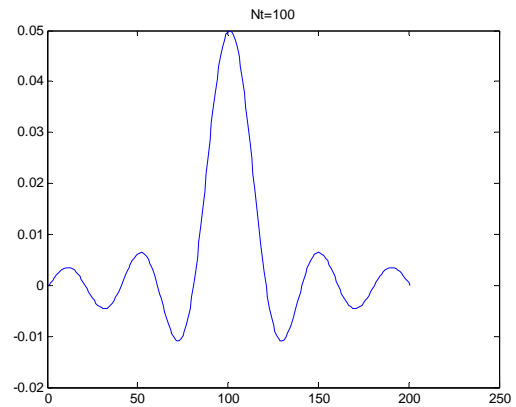
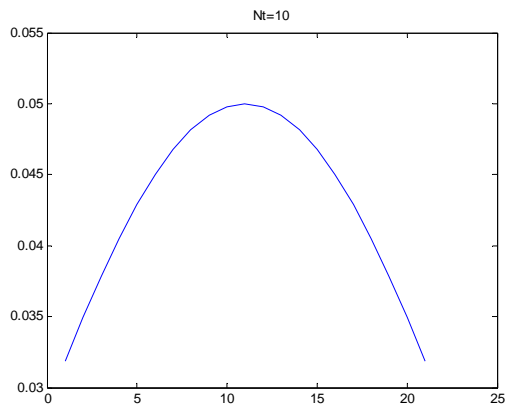
$$y(n) = x(n) - a x(n-1)$$

- 1- Déterminer la fonction de transfert du système.
- 2- Déterminer la transformée en z de $\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \text{pour } n \neq 0 \end{cases}$ et de $\delta(n-1)$.
En déduire la réponse impulsionnelle du système.
- 3- Soit $u(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \geq 0 \\ 0 & \text{pour } n < 0 \end{cases}$ (échelon unité). Déterminer sa transformée en z , ainsi que son domaine d'existence. En déduire la réponse indicielle du système.

Chapitre 4 : le filtrage numérique (Filtres numériques linéaires, invariants dans le temps)

Synthèse des filtres numériques rationnels : exemple de filtre RIF

```
%Fréquence de coupure
fc=50
%Fréquence d'échantillonnage
Fe=2000;
%Ordre du filtre = 2*Nt+1
Nt=10
t = [-Nt:Nt]
%Génération et tracé de la réponse impulsionnelle
h=2*(fc/Fe)*sinc(2*(fc/Fe)*t);
figure
plot(h)
title('Nt=10')
```



```
%Génération du cosinus
% Indices du tableau de points de signal
k=[1:1000];
% Fréquence du cosinus
f=100;
% Période d'échantillonnage
Te=1/Fe;
% Génération du cosinus numérique = tableau de points d'un sinus de
fréquence f % échantillonné à Fe=1/Te
x=cos(2*pi*f*k*Te);

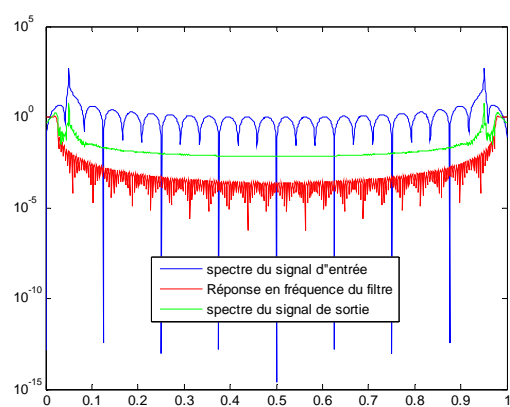
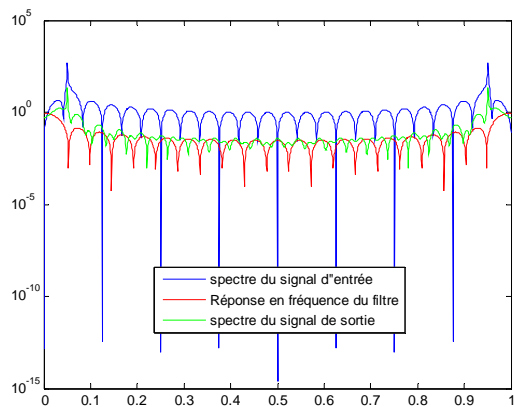
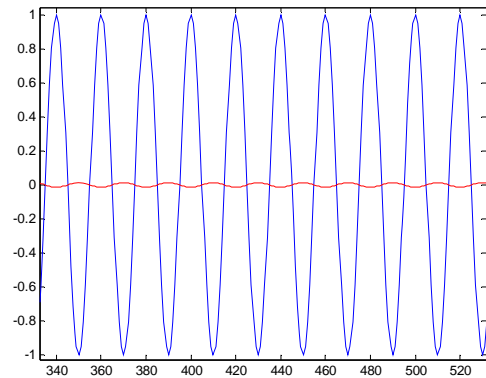
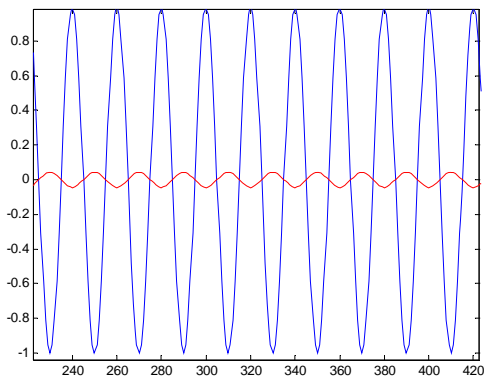
%Filtrage du cosinus par le filtre RIF de réponse impulsionnelle h
y=filter(h,1,x);
```

```
%Tracé des signaux à l'entrée et à la sortie du filtre
```

```
figure  
plot(x);  
hold on  
plot(y, 'r');
```

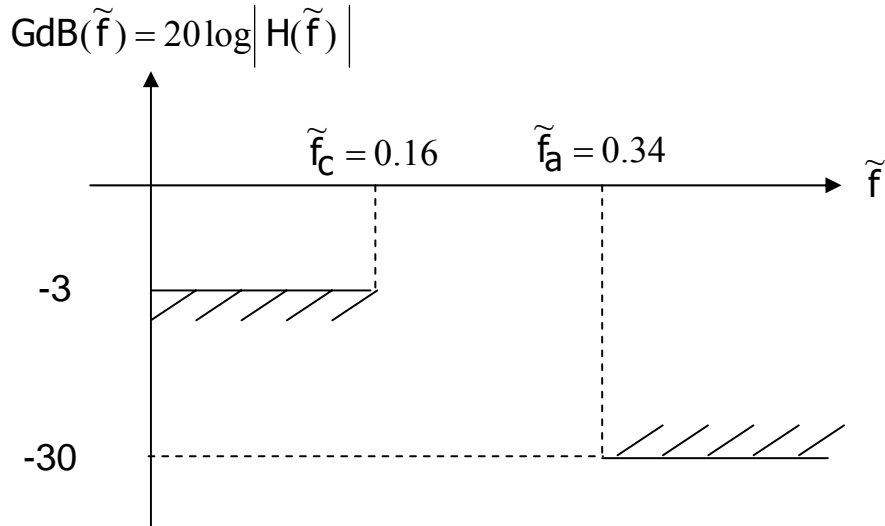
```
%Tracé des spectres des signaux à l'entrée et à la sortie du filtre
```

```
X=fft(x,2^nextpow2(length(x)));  
H=fft(h,2^nextpow2(length(x)));  
Y=fft(y,2^nextpow2(length(y)));  
figure  
semilogy(linspace(0,1,length(X)),abs(X));  
hold on  
semilogy(linspace(0,1,length(X)),abs(H), 'r');  
semilogy(linspace(0,1,length(Y)),abs(Y), 'g');  
legend('spectre du signal d"entrée', 'Réponse en fréquence du  
filtre', 'spectre du signal de sortie')
```



Synthèse des filtres numériques rationnels : exemple de synthèse de filtre RII guidée

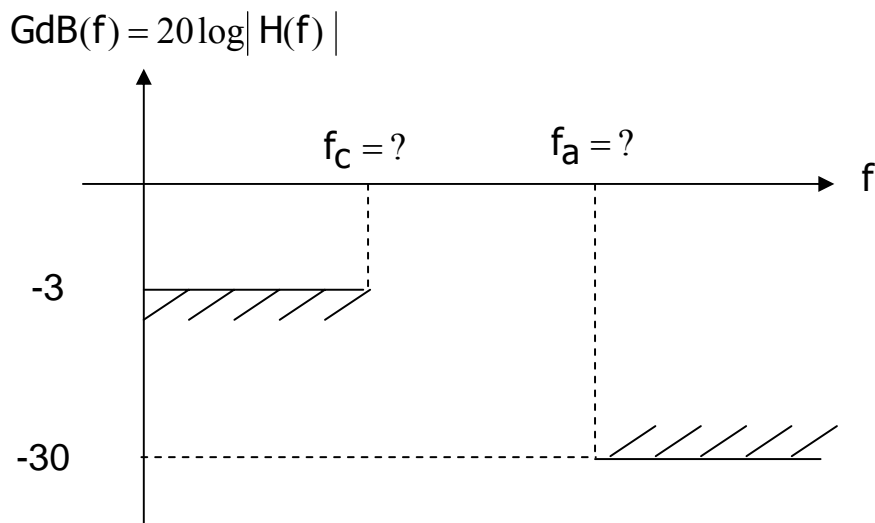
On se propose de synthétiser un filtre passe-bas numérique de type RII. Le gabarit à respecter est le suivant :



Afin de simplifier les calculs la fréquence d'échantillonnage sera considérée égale à 1Hz.

La synthèse de filtre RII est une méthode de synthèse numérique qui utilise la synthèse analogique. Cette synthèse analogique a besoin en entrée d'un gabarit analogique à respecter et retourne la fonction de transfert $H(p)$ d'un filtre respectant ce gabarit.

1. *Passage du gabarit numérique au gabarit d'entrée de la synthèse analogique :* compléter le gabarit suivant qui sera le gabarit d'entrée de la synthèse analogique.



2. Synthèse analogique.

- On doit choisir une fonction modèle analogique et régler ses paramètres afin de satisfaire le gabarit souhaité. On choisit d'utiliser ici le modèle passe-bas de Butterworth, dont la fonction de transfert est donnée par :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^{2N}}.$$

Montrer que le paramètre N permettant au modèle de Butterworth de satisfaire le gabarit est égal à 3 :

$$|H(\omega)|^2 = \left[|H(p)|^2 \right]_{p=j\omega} \Rightarrow \text{Pour } N=3 : |H(p)|^2 = \frac{1}{1-p^6} = H(p) H(-p),$$

en oubliant pour l'instant le $\frac{1}{\omega_C}$, on remplacera p par $\frac{p}{\omega_C}$ à la fin.

- Parmi les 6 pôles de $|H(p)|^2$ (qui sont les racines sixièmes de l'unité), 3 appartiennent à $H(p)$, 3 appartiennent à $H(-p)$.

On choisira comme pôles pour $H(p)$:

$$p_0 = -1, \quad p_1 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_2 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Expliquer ce qui conduit à ce choix :

⇒ On en déduit la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2 + p + 1)},$$

soit en remplaçant p par $\frac{p}{\omega_C}$:

$$H(p) = \frac{\omega_C^3}{(p + \omega_C)(p^2 + p\omega_C + \omega_C^2)}$$

3- Application de la transformée bilinéaire

Après application de la transformée bilinéaire sur $H(p)$ on obtient la fonction de transfert du filtre numérique satisfaisant le gabarit numérique de départ :

$$H(z) = H_1(z)H_2(z),$$

$$\text{avec } H_1(z) = \frac{0.43(1+z^{-1})}{1-0.29z^{-1}} \text{ et } H_2(z) = \frac{0.135 + 0.27z^{-1} + 0.135z^{-2}}{1-0.753z^{-1} + 0.4z^{-2}}$$

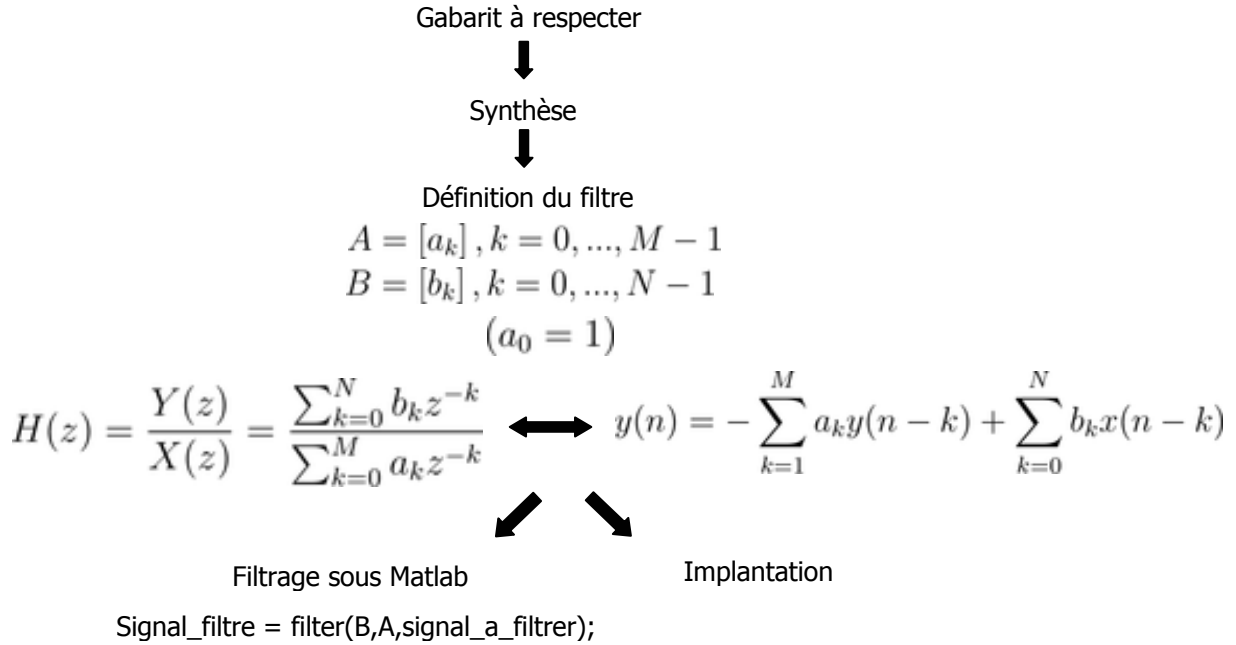
- Le filtre obtenu est-il stable ? Justifiez votre réponse.

- Le filtre obtenu est-il résonnant ? Justifiez votre réponse.

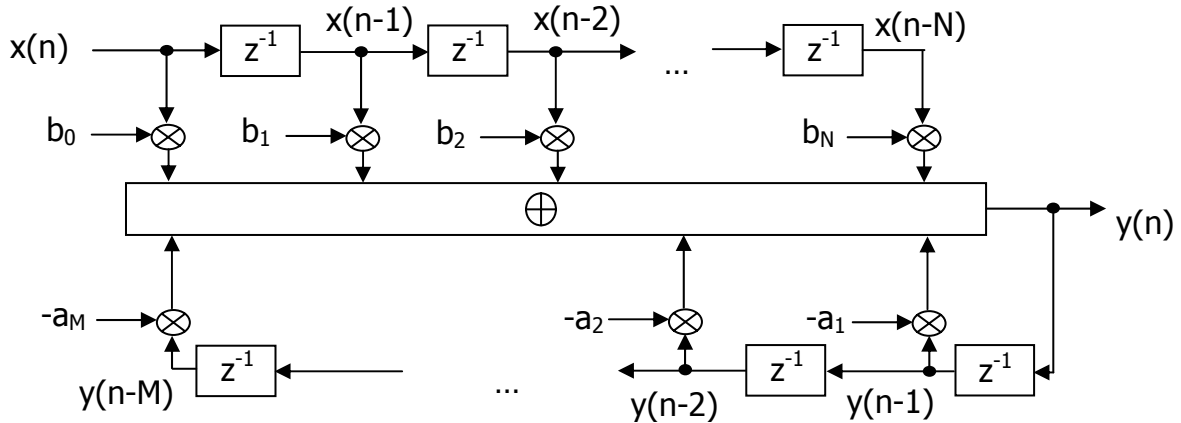
- On souhaite filtrer un signal x en utilisant le filtre RII synthétisé (de fonction de transfert $H(z)$). En appelant y le signal de sortie proposer un programme matlab permettant de passer de x à y . Ce programme pourra être testé pour filtrer des sinusoides lors des séances de TP.

Chapitre 4 : le filtrage numérique (Filtres numériques linéaires, invariants dans le temps)

Implantation des filtres numériques rationnels



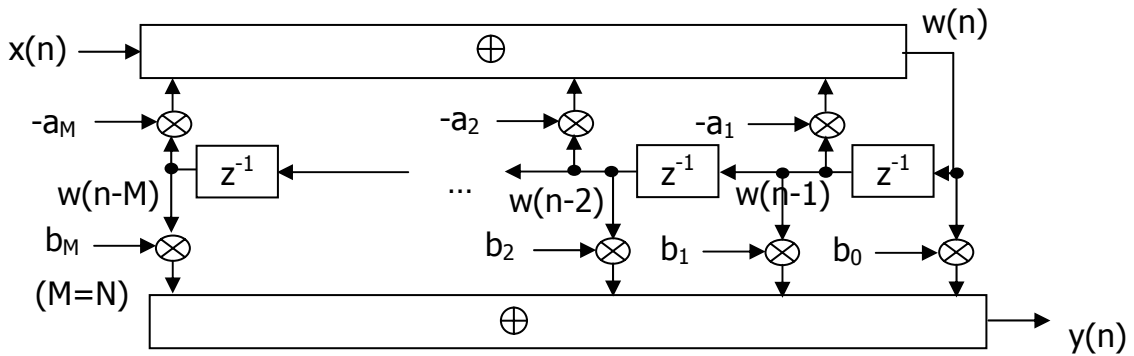
1 – Structure directe



Deux files d'attente, $M+N+1$ opérations +/-

2 – Structure canonique

$$W(z) = \frac{X(z)}{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}$$

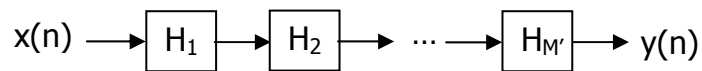


Une file d'attente, $M+N+1$ opérations +/-

3- Structures décomposées

Série ou cascade

$$H(z) = G \prod_{i=0}^{M'} H_i(z)$$

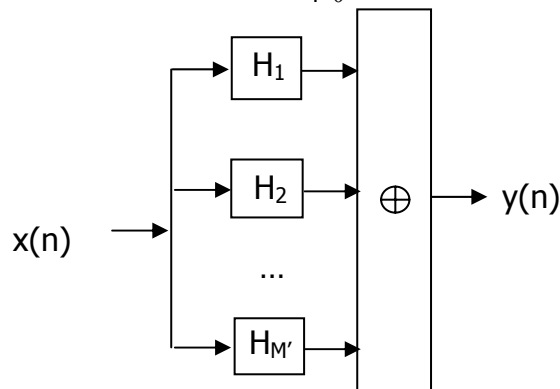


$H_i(z)$ cellules du premier et du deuxième ordre

$$H_i(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \quad H_i(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Parallèle

$$H(z) = C + \sum_{i=0}^{M'} H_i(z)$$

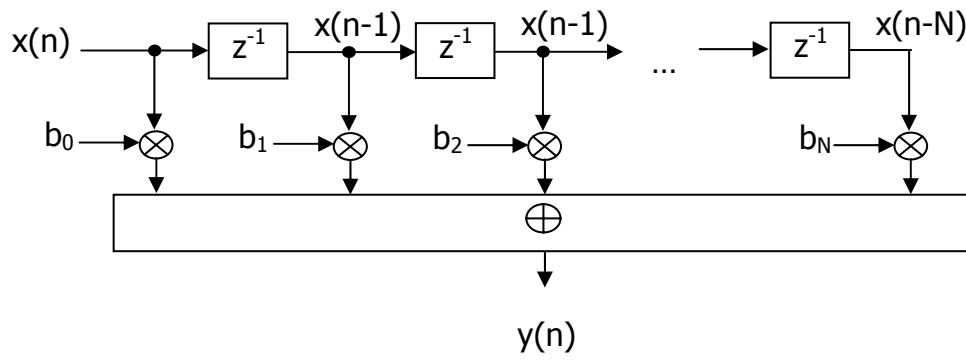


$H_i(z)$ cellules du premier et du deuxième ordre

$$H_i(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1}}$$

$$H_i(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

3- Structure non réursive



Chapitre 4 : le filtrage numérique (Filtres numériques linéaires, invariants dans le temps)

Etude de la cellule du second ordre

I. Cellule purement réursive

On la définit par l'équation aux différences suivantes :

$$y(n) = x(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$$

- 1- Exprimez sa fonction de transfert en z
- 2- Dans le plan des coefficients (a_1 en abscisse, a_2 en ordonnées), tracez le domaine de stabilité du filtre.
- 3- Donnez l'expression de la réponse en fréquence en fonction de a_1 et a_2 .
- 4- A quelle condition existe-t'il une pulsation de résonance ω_0 ?
- 5- Montrez que la valeur du module de la réponse harmonique à la résonance est inversement proportionnelle à la distance des pôles au cercle unité. On se placera dans le cas où $a_1^2 < 4a_2$ et on écrira la réponse en fréquence en ω_0 sous forme polaire. On donne :

$$|H(\omega_0)| = \frac{2\sqrt{a_2}}{(1-a_2) \cdot \sqrt{4a_2 - a_1^2}}$$

- 6- Donnez l'expression de la réponse impulsionnelle en fonction des coordonnées polaires r et θ des pôles dans le cas où $a_1^2 < 4a_2$.
- 7- Proposez une structure de réalisation de ce filtre.

II. On considère une équation plus générale

Soit une équation plus générale :

$$y(n) = x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$$

- 1- Exprimez sa fonction de transfert en z .
- 2- Montrez que cette cellule du second ordre peut être considérée comme la mise en cascade de la cellule purement réursive précédente et d'un filtre RIF.
- 3- En déduire une structure de réalisation.
- 4- Pour $b_2 = 1$ montrez que la phase du RIF est linéaire.